Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

5. előadás:
Numerikus sorozatok:
monotonitás, korlátosság, konvergencia,
torlódási pont,
műveletek numerikus sorozatokkal

Valós számsorozatok

Önmagukban ritkán fordulnak elő az alkalmazásokban, de megalapozzák a függvények vizsgálatát, differenciálszámítást, integrálszámítást.

Azokat a függvényeket, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza ($\mathbb{Z}^+$) és értékkészlete a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$), **valós számsorozatoknak** nevezzük.

$$\mathbb{Z}^+ \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$$

a_n	-	a sorozat n-dik eleme, megadja az általános hozzárendelési szabályt
$\{a_n\}$	-	a sorozat maga, összes elemével

Megadás:

- hozzárendelési szabállyal

  $$n \mapsto 2n-5 \ : \ \{-3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-5, \ldots\}$$

- rekurzióval $\quad a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ : \ \{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$ (Fibonacci)

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy egy $\{a_n\}$ számsorozat **monoton növekvő (csökkenő)**, ha minden n esetén $a_n \leq (\geq) a_{n+1}$.

Továbbá egy $\{a_n\}$ számsorozat **szigorúan monoton növekvő(csökkenő)**, ha minden n esetén $a_n < (>) a_{n+1}$.

Monotonnak nevezzük a sorozatot akkor is, ha csak $n > N$ indextől kezdve teljesíti a monotonitás feltételét (azaz az első néhány elemre nem monoton).

Szigorúan monoton sorozat egyben monoton is.

Példák.

$a_n = 1$	$\{a_n\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$	-	konstans, monoton növő/csökkenő, de nem szigorúan monoton
$b_n = (-1)^n$	$\{b_n\} = \{-1, 1, -1, \ldots\}$	-	oszcillál, nem monoton növő/csökkenő
$c_n = 1/n$	$\{c_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$	-	monoton csökkenő

Monotonitás

Példa. Lássuk be, hogy az $d_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozat monoton! Csökkenő vagy növekvő a sorozat?

Monotonitás

Példa. Lássuk be, hogy az $d_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozat monoton! Csökkenő vagy növekvő a sorozat?

$$\begin{aligned} d_n &\gtrless d_{n+1} \\ \frac{2n-1}{n+1} &\gtrless \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} \\ (2n-1)(n+2) &\gtrless (2n+1)(n+1) \\ 2n^2+3n-2 &\gtrless 2n^2+3n+1 \\ -2 &< 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Tehát $\{d_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekedő.

Korlátosság

Az $\{a_n\}$ sorozat **felülről korlátos**, ha elemeinek halmaza felülről korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, úgy hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n \leq K$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **alulról korlátos**, ha elemeinek halmaza alulról korlátos, azaz $\exists k \in \mathbb{R}$, úgy hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n \geq k$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **korlátos**, ha felülről és alulról is korlátos.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak $\mathrm{Sup}(a_n)$ **legkisebb felső korlátja (Supremuma)**, ha felső korlátja a sorozatnak és $\forall K \in \mathbb{R}$ felső korlát esetén $\mathrm{Sup}(a_n) \leq K$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak $\mathrm{Inf}(a_n)$ **legnagyobb alsó korlátja (Infimuma)**, ha alsó korlátja a sorozatnak és $\forall k \in \mathbb{R}$ alsó korlát esetén $\mathrm{Inf}(a_n) \geq k$.

Tétel. Minden felülről (illetve alulról) korlátos valós számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$-ben. (Nem biz.)

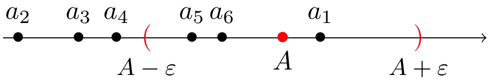
Korlátosság

Példa.

$a_n = 1$	-	konstans, korlátos, $\text{Inf}(a_n) = \text{Sup}(a_n) = 1$
$b_n = (-1)^n$	-	oszcillál, korlátos, $\text{Inf}(b_n) = -1, \quad \text{Sup}(b_n) = 1$
$c_n = 1/n$	-	monoton csökkenő, korlátos, mert minden eleme pozitív $\text{Inf}(c_n) = 0$, továbbá $\text{Sup}(c_n) = c_1 = 1$
$d_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$	-	monoton növő, alulról korlátos, mert $\text{Inf}(d_n) = d_1 = \frac{1}{2}$, felső korlát? ($< 2$).

Konvergencia

Legyen $\{a_n\}$ egy valós számsorozat és $A \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $\{a_n\}$ sorozat **tart** vagy **konvergál** A-hoz, ha az A bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén kívül véges sok a_n elem van.



Átfogalmazva $\{a_n\}$ valós számsorozat az $A \in \mathbb{R}$ számhoz tart, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N_ε küszöbindex, melytől kezdve ha $n > N_\varepsilon$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ekkor A szám az $\{a_n\}$ sorozat **határértéke**. Jelölés:

$$a_n \to A, \quad \text{vagy} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \quad \text{vagy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **divergens**, ha nem konvergens (nincs határértéke).

Konvergencia

Példa. Lássuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Konvergencia

Példa. Lássuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

A definició alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz kell egy indexet találnunk, úgy, hogy

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

$$\text{mivel } n > 0, \text{ezért} \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\text{így} \quad N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} < n$$

azaz, ha $\varepsilon = 0.1$, akkor $N_\varepsilon = 10$, ha $\varepsilon = 0.001$, akkor $N_\varepsilon = 1000$ jó küszöbindex.

Konvergencia

Korábbi példa. Lássuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$.

Konvergencia

Korábbi példa. Lássuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2.$

A definició alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz kell egy indexet találnunk, úgy, hogy

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{2n-1-(2n+2)}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\text{mivel } n > 0, \quad \frac{3}{n+1} < \varepsilon$$

$$\text{így} \quad N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1 < n$$

azaz, ha $\varepsilon = 0.1$, akkor $N_\varepsilon = 3 \cdot 10 - 1 = 29$.

Ha $n > N_\varepsilon$: $a_{30} = 59/31 = 1.9032$, $a_{31} = 61/31 = 1.90625$ stb.

Ha $\varepsilon = 0.001$, akkor $N_\varepsilon = 3000 - 1 = 2999$ jó küszöbindex.

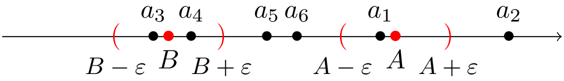
Konvergencia

Átfogalmazás: (Sorozatok konvergenciájának **Cauchy-féle definíció**ja)

Az $\{a_n\}$ valós számsorozat konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N_ε küszöbindex, melytől kezdve ha $n, m > N_\varepsilon$, akkor

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Következik belőle, hogy a határérték, ha létezik, akkor egyértelmű.



Indirekt tegyük fel, hogy A és B is határértéke $\{a_n\}$-nek.

Keressünk jó N_ε-t az $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$-hoz!

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Tétel (konvergencia→korlátosság).

Konvergens sorozat korlátos.

Példa. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, itt $k = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ és $K = a_1 = 1$.

Tétel (monotonitás+korlátosság→konvergencia).

Monoton növő felülről korlátos sorozat konvergens. Pl. $\left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}$

Monoton csökkenő alulról korlátos sorozat konvergens. Pl. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Monoton és korlátos sorozat konvergens.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} =$$

$$= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0,$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} =$$

$$= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0,$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\Longrightarrow$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} =$$

$$= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0,$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\Longrightarrow$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n - 1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} =$$

$$= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0,$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\Longrightarrow$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n-1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

$\Longrightarrow$ Alsó korlátja $k = -1$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} =$$

$$= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0,$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\Longrightarrow$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n - 1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

$\Longrightarrow$ Alsó korlátja $k = -1$.

Konvergens a sorozat, határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} =$$

$$= \frac{-2n^2-(2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0,$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\Longrightarrow$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n-1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

$\Longrightarrow$ Alsó korlátja $k = -1$.

Konvergens a sorozat, határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$\Longrightarrow$ Legnagyobb alsó korlátja $k = -\frac{1}{2}$.

Torlódási pont

Az $\{a_n\}$ sorozat **részsorozata** $\{b_k\} \subset \{a_n\}$ sorozat, ha létezik olyan monoton növő hozzárendelés $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $k \mapsto n_k$, úgy hogy $b_k = a_{n_k}$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak T szám **torlódási pontja**, ha létezik $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ részsorozata, melynek határértéke T.

Példa: $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1 \dots\}$ két torlódási pontja van ± 1.

Torlódási pont

Az $\{a_n\}$ sorozat **részsorozata** $\{b_k\} \subset \{a_n\}$ sorozat, ha létezik olyan monoton növő hozzárendelés $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $k \mapsto n_k$, úgy hogy $b_k = a_{n_k}$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak T szám **torlódási pontja**, ha létezik $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ részsorozata, melynek határértéke T.

Példa: $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1 \ldots\}$ két torlódási pontja van ± 1.

Tétel. Konvergens sorozatnak csak egy torlódási pontja van, a határértéke,

azaz

konvergens sorozatnak minden részsorozata is konvergens, és a részsorozatok határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Például:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{így} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \ldots \text{ stb.}$$

Tétel. (Bolzano-Weierstrass) Korlátos sorozatnak mindig van torlódási pontja. (nem biz.)

Műveletek konvergens sorozatokkal

Tétel. Korlátos sorozatokból tagonkénti összegéssel, kivonással vagy sorzással kapott sorozatok is korlátosak.

Tétel. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda A$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = A^k$, $k > 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$, feltéve, hogy $a_n > 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$.

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n^4+3n^2+2}{7n^4+4n^3+6}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{7+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^4}}} = \sqrt{\frac{2+0+0}{7+0+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$