Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem

Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar

Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

6. előd́ás:
Numerikus sorozatok:
Műveletek numerikus sorozatokkal
Rendőr-elv,
Véges, végtelen határérték fogalma,
Nevezetes sorozatok

Műveletek konvergens sorozatokkal

Tétel. Korlátos sorozatokból tagonkénti összegéssel, kivonással vagy sorzással kapott sorozatok is korlátosak.

Tétel. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda A$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = A^k$, $k > 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$, feltéve, hogy $a_n > 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$.

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n+1} =$$
$$2 - 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3\cdot 0 = 2.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 2\cdot 0 - 0^2 = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n^4+3n^2+2}{7n^4+4n^3+6}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{7+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^4}}} = \sqrt{\frac{2+0+0}{7+0+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$-re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H$.

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$-re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$-re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

$$\{b_n\} = \left\{\sin(1) \approx 0,8415; \frac{\sin(2)}{2} \approx 0,4546; \frac{\sin(3)}{3} \approx 0,047; \frac{\sin(4)}{4} \approx -0,1892; \ldots\right\}$$

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$-re

$$a_n \le b_n \le c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

$$\{b_n\} = \left\{\sin(1) \approx 0,8415; \frac{\sin(2)}{2} \approx 0,4546; \frac{\sin(3)}{3} \approx 0,047; \frac{\sin(4)}{4} \approx -0,1892; \dots\right\}$$

Használjuk ki a $\sin(x)$ korlátosságát: $-1 \le \sin(x) \le 1$, ezért

$$a_n = \frac{-1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n} = c_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$-re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

$$\{b_n\} = \left\{\sin(1) \approx 0,8415; \frac{\sin(2)}{2} \approx 0,4546; \frac{\sin(3)}{3} \approx 0,047; \frac{\sin(4)}{4} \approx -0,1892; \dots\right\}$$

Használjuk ki a $\sin(x)$ korlátosságát: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, ezért

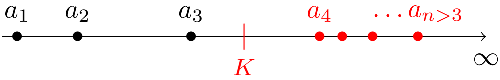
$$a_n = \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} = c_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Ebből a rendőr-elv alapján következik, hogy: $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$

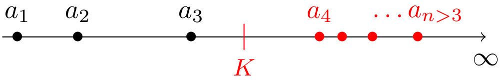
Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞-be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.



Végtelenbe tartás

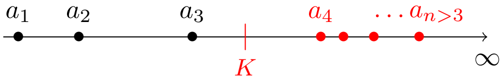
Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞-be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.



Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart** a $-\infty$-be, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a** ∞**-be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.

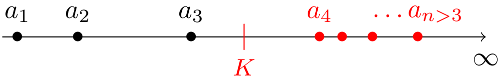


Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart** a $-\infty$-be, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

A $\pm\infty$-be tartó sorozatok is divergensnek.

Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞-be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.



Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart** a $-\infty$-be, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

A $\pm\infty$-be tartó sorozatok is divergensnek.

Példák.

$\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$	-	monoton nő, de nincsen felső korlátja, ∞-be tart.
$\{b_n\} = \{-n^2\} = \{-1, -4, -9, \dots\}$	-	csökken, alulról nem korlátos, $-\infty$-be tart.
$\{c_n\} = \{(-1)^n \cdot n\} = \{-1, 2, -3, \dots\}$	-	oszcillál, nem korlátos, egyik "fele" a ∞-be, másik a $-\infty$-be tart.

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \text{"}A \pm \infty\text{"} = \pm\infty$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \text{"}A \cdot \infty\text{"} \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{"}\frac{A}{\infty}\text{"} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \text{"}A \pm \infty\text{"} = \pm\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \text{"}A \cdot \infty\text{"} \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{"}\frac{A}{\infty}\text{"} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n + c_n = \text{"}\infty + \infty\text{"} = \infty$ DE $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - c_n = \text{"}\infty - \infty\text{"} = ?$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot c_n = \text{"}\infty \cdot \infty\text{"} = \infty$ DE $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = ?$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^k = \text{"}\infty^k\text{"} = \infty \qquad (k > 0)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{c_n} = \text{"}\infty^\infty\text{"} = \infty$

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \text{"}A \pm \infty\text{"} = \pm\infty$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \text{"}A \cdot \infty\text{"} \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{"}\frac{A}{\infty}\text{"} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty} b_n + c_n = \text{"}\infty + \infty\text{"} = \infty$ DE $\lim_{n\to\infty} b_n - c_n = \text{"}\infty - \infty\text{"} = ?$
- $\lim_{n\to\infty} b_n \cdot c_n = \text{"}\infty \cdot \infty\text{"} = \infty$ DE $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = ?$
- $\lim_{n\to\infty} (b_n)^k = \text{"}\infty^k\text{"} = \infty \qquad (k > 0)$
- $\lim_{n\to\infty} (b_n)^{c_n} = \text{"}\infty^\infty\text{"} = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \text{"}A^\infty\text{"} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 1, \\ 0, & \text{ha } 0 < A < 1, \\ ?, & \text{ha } A \leq 0 \text{ vagy } A = 1, \end{cases}$

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = "A \pm \infty" = \pm\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = "A \cdot \infty" \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$ $\qquad (0 \cdot \infty)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = "\dfrac{A}{\infty}" = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n + c_n = "\infty + \infty" = \infty$ DE $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - c_n = "\infty - \infty" = ?$ $\qquad (\infty - \infty)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot c_n = "\infty \cdot \infty" = \infty$ DE $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{c_n} = "\dfrac{\infty}{\infty}" = ?$ $\qquad \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^k = "\infty^k" = \infty \qquad (k > 0)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{c_n} = "\infty^\infty" = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = "A^\infty" = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 1, \\ 0, & \text{ha } 0 < A < 1, \\ ?, & \text{ha } A \leq 0 \text{ vagy } A = 1, \end{cases}$ $\qquad (1^\infty)$

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: $"0 \cdot \infty"$, $"\infty - \infty"$, $"\dfrac{\infty}{\infty}"$, $"\dfrac{0}{0}"$, $"1^{\infty}"$, $"0^{0}"$ ...

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: $''0 \cdot \infty''$, $''\infty - \infty''$, $''\dfrac{\infty}{\infty}''$, $''\dfrac{0}{0}''$, $''1^{\infty}''$, $''0^{0}''$ ...

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \qquad \text{DE} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: $"0 \cdot \infty"$, $"\infty - \infty"$, $"\dfrac{\infty}{\infty}"$, $"\dfrac{0}{0}"$, $"1^{\infty}"$, $"0^{0}"$ ...

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \qquad \text{DE} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n - n = \infty - \infty = \infty \qquad \text{DE} \qquad \lim_{n\to\infty} n - n^2 = \infty - \infty = -\infty.$$

Műveletek ∞-hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: $"0 \cdot \infty"$, $"\infty - \infty"$, $"\dfrac{\infty}{\infty}"$, $"\dfrac{0}{0}"$, $"1^{\infty}"$, $"0^{0}"$ ...

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \qquad \text{DE} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n - n = \infty - \infty = \infty \qquad \text{DE} \qquad \lim_{n\to\infty} n - n^2 = \infty - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \infty - \infty = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty + \infty} = 0.$$

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növő, nem korlátos, ∞-hez tartó a sorozat.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növő, nem korlátos, ∞-hez tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, 1-hez tart.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növő, nem korlátos, ∞-hez tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, 1-hez tart.

Legyen $q = \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$, ekkor $\{q^n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$ vagy $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right\}$.

- Ha $-1 < q < 1$, abszolútértékben monoton csökken, tehát 0-hoz tart.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növő, nem korlátos, ∞-hez tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, 1-hez tart.

Legyen $q = \dfrac{1}{2}$ vagy $-\dfrac{1}{2}$, ekkor $\{q^n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$ vagy $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right\}$.

- Ha $-1 < q < 1$, abszolútértékben monoton csökken, tehát 0-hoz tart.

Legyen $q = -2$, ekkor $\{1, -2, 4, -8, 16, \dots\}$.

- Ha $q < -1$, oszcillál, nem korlátos, divergens a sorozat.

$$\text{Tehát } \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ \text{divergens}, & \text{ha } q \le -1. \end{cases}$$

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}$, ha $q > 0$:

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}$, ha $q > 0$:

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

- 1-hez tart, gondoljuk meg:

  Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} > 1$ és monoton csökkenő sorozatot alkot. Legnagyobb alsó korlátja az 1 lesz (nem biz.)

  Ha $q < 1$, akkor $\sqrt[n]{q} < 1$ és monoton növekvő sorozatot alkot. Legkisebb felső korlátja az 1 lesz (nem biz.)

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}$, ha $q > 0$:

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

- 1-hez tart, gondoljuk meg:

  Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} > 1$ és monoton csökkenő sorozatot alkot. Legnagyobb alsó korlátja az 1 lesz (nem biz.)

  Ha $q < 1$, akkor $\sqrt[n]{q} < 1$ és monoton növekvő sorozatot alkot. Legkisebb felső korlátja az 1 lesz (nem biz.)

$\{b_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots\}$:

egész számok egész gyökeinek sorozata.

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \ldots\}$, ha $q > 0$:

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

- 1-hez tart, gondoljuk meg:

  Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} > 1$ és monoton csökkenő sorozatot alkot. Legnagyobb alsó korlátja az 1 lesz (nem biz.)

  Ha $q < 1$, akkor $\sqrt[n]{q} < 1$ és monoton növekvő sorozatot alkot. Legkisebb felső korlátja az 1 lesz (nem biz.)

$\{b_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots\}$:

egész számok egész gyökeinek sorozata.

- 1-hez tart, gondoljuk meg (nem biz.):

  A sorozat minden eleme $\sqrt[n]{n} \geq 1$, sőt legnagyobb alsó korlátja is az 1 (nem biz.), és a harmadik elemtől monoton csökken (nem biz.):

  $b_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142 < b_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1.4422$ DE
  $b_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1.4422 > b_4 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \approx 1,4142 > b_5 = \sqrt[5]{5} \approx 1,3797 \ldots.$

Nevezetes sorozatok – Példák

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = ?$$

Nevezetes sorozatok – Példák

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = ?$$

Rendőr-elv segítségével:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{n} \underset{n>1}{<} & \sqrt[n]{2n-1} < & \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 & & \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1 = 1 \end{array}$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = 1$.

Nevezetes sorozatok – Az "e" szám

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ - sorozat e-hez $(\approx 2,718..)$ tart.

Az $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < e$ és monoton növekvő a sorozat. Továbbá a_n felülről korlátos. Például belátható, hogy egyik felső korlátja a 3. Nem adunk teljes indoklást!

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ - sorozat e-hez $(\approx 2,718..)$ tart.

Az $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < e$ és monoton növekvő a sorozat. Továbbá a_n felülről korlátos. Például belátható, hogy egyik felső korlátja a 3. Nem adunk teljes indoklást!

$b_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ - sorozat e^k-hoz tart.

Nevezetes sorozatok – Példa

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\dfrac{2n+2}{n-1}} =$$

$$= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{6}{m}\right)^{m}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{n-1}} = \left(e^6\right)^2 = e^{12}.$$

Nevezetes sorozatok – Példa

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\dfrac{2n+2}{n-1}} =$$

$$= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{6}{m}\right)^{m}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{n-1}} = \left(e^6\right)^2 = e^{12}.$$

vagy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^{2n+2}}{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2}}{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}} = \frac{(e^5)^2\cdot 1}{(e^{-1})^2\cdot 1} = e^{10-(-2)} = e^{12}.$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \underset{k>1}{n^k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n} \ll n!$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \underset{a>1}{=} 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n} \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \underset{a>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\underset{k>1}{\sqrt[k]{n}} \ll n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n} \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \underset{a>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \underset{k>1}{=} 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\underset{a>1}{\log_a(n)} \ll \underset{k>1}{\sqrt[k]{n}} \ll n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n} \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \underset{a>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \underset{k>1}{=} 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{\sqrt[k]{n}} \underset{a>1,\, k>1}{=} 0.$$