Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

7. előadás:
Függvényhatárértékek, Az átviteli-elv, Végtelenbe tartás, Nevezetes függvényhatárértékek

Határérték definíciója

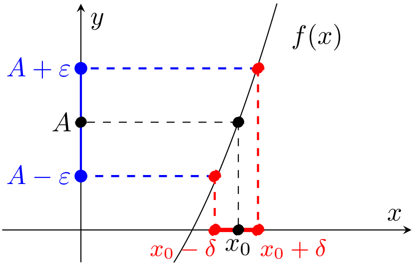
Definíció. Legyen f valós függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében, ekkor x_0-ban f **határértéke** A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, melyre ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

vagy

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A.$$



Bár f az x_0 környezetében definiált, azt nem követeljük meg, hogy a függvény x_0-ban is értelmezve legyen.

Példa

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$-ben?

Példa

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \backslash \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$-ben?

Mivel

$$f(x) = \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2},$$

így ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 2x + 1$, és $2x + 1 \approx 5$, ha x közelít 2-höz.

Definiálhatnánk így is a függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve}, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Sejtjük, hogy $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. A definíció alapján

$$\left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \quad x \neq 2$$

$$|2x - 4| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta \text{ jó lesz!}$$

Példa – Az egészrész függvény

Mi a helyzet az $f(x) = [x] = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x < k+1\}$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$-ben?

Példa – Az egészrész függvény

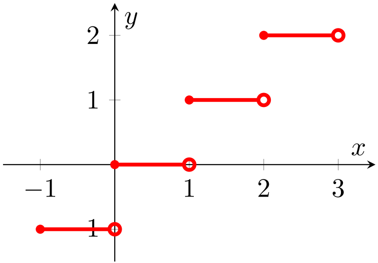
Mi a helyzet az $f(x) = [x] = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x < k+1\}$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$-ben?

Ha $|x - 2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor

$$f(x) = 2, \text{ ha } x > 2, \text{ és}$$
$$f(x) = 1, \text{ ha } x < 2.$$

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$-gyel, sem $A = 2$-vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Érdemes külön tekinteni a két oldalt:

Definíció. Legyen f valós függvény értelmezve az x_0 pont egy jobb oldali környezetében, ekkor az f valós függvénynek az x_0 pontban a **jobb oldali határértéke** $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, melyre ha $0 < x - x_0 < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$.

Definíció. Legyen f valós függvény értelmezve az x_0 pont egy baloldali oldali környezetében, ekkor az f valós függvénynek az x_0 pontban a **bal oldali határértéke** $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, melyre ha $0 < x_0 - x < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$.

Előző példában: $\lim\limits_{x \to 2-} [x] = 1,$ és $\lim\limits_{x \to 2+} [x] = 2.$

Határérték egyértelműsége

Tétel: Ha az f függvénynek x_0 pontban létezik a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékkel.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Tétel: Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ és } \lim_{x \to x_0} f(x) = B \text{ esetén } A = B.$$

Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \dfrac{|A - B|}{3}$-hoz nincs jó δ,

hasonlóan, mint a sorozatoknál ε-hoz nincsen N_ε.

Átviteli-elv

Egy függvénynek x_0-ban A a határértéke akkor és csak akkor, ha **bármely** $\{x_n\}$ sorozatra, mely $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in D_f, (x_n \neq x_0)$, igaz lesz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Ezek alapján belátható, hogy csak úgy, mint a sorozatoknál, ha

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ feltéve, hogy $g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$.

Féloldali határértékekre hasonlóan.

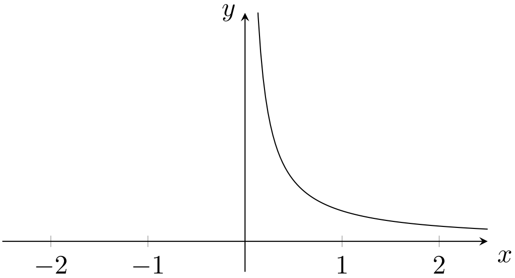
Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? $(0 \notin D_f)$

Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? $(0 \notin D_f)$

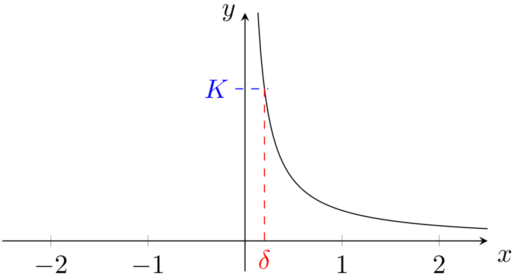
Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvényérték, tehát a függvény a végtelenhez tart.



Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? ($0 \notin D_f$)

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvényérték, tehát a függvény a végtelenhez tart.



Definíció. Az $f: D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke jobbról** ∞, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$, és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \infty$.

Végtelen határérték – variációk

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke (jobbról/balról)** ∞, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ (és $x > x_0$/és $x < x_0$), akkor $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0(\pm)} f(x) = \infty.$

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke (jobbról/balról)** $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ (és $x > x_0$/és $x < x_0$), akkor $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0(\pm)} f(x) = -\infty.$

Példában $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ DE $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Továbbá $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty.$

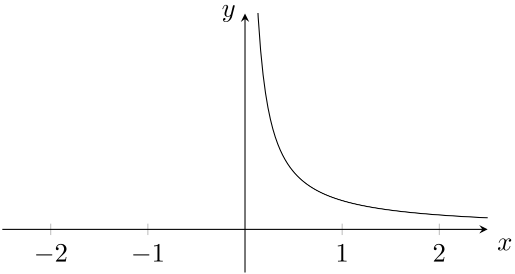
Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

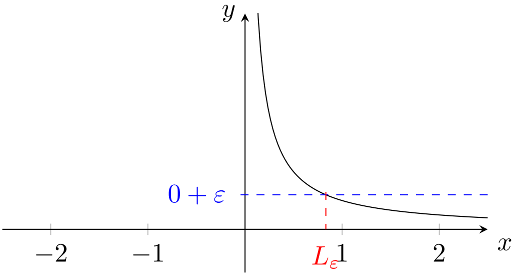
Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a ∞-ben 0-hoz tart.



Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a ∞-ben 0-hoz tart.



Definíció. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek a ∞**-ben a határértéke** A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_\varepsilon < x$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Végtelenben végtelen

Lehetséges, hogy a végtelenben a függvény $(\pm)$végtelenhez tart:

Definíció. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvény a ∞-**ben** $(-)\infty$-**hez tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_K < x$, akkor $x \in D_f$ és $f(x) > K$ $(f(x) < K)$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

Hasonlóan a $-\infty$-ben tarthat f egy A számhoz vagy $\pm\infty$-hez:

Definíció. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek a $-\infty$-**ben határértéke** A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_\varepsilon > x$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

Definíció. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvény a $-\infty$-**ben** $(-)\infty$-**hez tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_K > x$, akkor $x \in D_f$ és $f(x) > K$ $(f(x) < K)$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Összefoglalás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek

az x_0 pontban
az x_0 pontban a jobb oldali
az x_0 pontban a bal oldali
a $+\infty$-ben a
a $-\infty$-ben a

határértéke $A \in \mathbb{R}$, / $+\infty$, / $-\infty$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz / $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$ / $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$ / $L_K \in \mathbb{R}$, hogy

ha $|x - x_0| < \delta$ / $0 < x - x_0 < \delta$ / $0 < x_0 - x < \delta$ / $L_\varepsilon < |x|$ / $L_K < |x|$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. / $f(x) > K$. / $f(x) < K$.

Nevezetes határértékek

Polinomfüggvények: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad D_f = \mathbb{R}.$

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, \\ -\infty & a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0,\ n \text{ páros, vagy } a_n < 0,\ n \text{ páratlan} \\ -\infty & a_n < 0,\ n \text{ páros, vagy } a_n > 0,\ n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa:

$$\lim_{x\to\infty} -x^2 + 4x + 1 = \lim_{x\to\infty} (-x^2)\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1-0-0) = -\infty$$

Nevezetes határértékek

Polinomfüggvények: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad D_f = \mathbb{R}.$

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, \\ -\infty & a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0,\ n \text{ páros, vagy } a_n < 0,\ n \text{ páratlan} \\ -\infty & a_n < 0,\ n \text{ páros, vagy } a_n > 0,\ n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa:

$$\lim_{x\to\infty} -x^2 + 4x + 1 = \lim_{x\to\infty} (-x^2)\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1-0-0) = -\infty$$

Racionális tört függvények: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, ahol p, q polinomok,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Példa:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2+3}{2^2-1} = \frac{5}{3}, \qquad \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-3+3}{(-3)^2-1} = \frac{0}{8} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3/x}{x-1/x} = \text{„}\frac{1+0}{\infty-0}\text{”} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{”} = 0$$

Példa - Féloldali határérték

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x+3}{x^2-1} =?$$

legyen $x = 1 + h$, ahol $h > 0$, ha $x \to 1+$ akkor $h \to 0+$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h+4}{h^2+2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h+4}{h(h+2)} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0+} \frac{h+4}{h+2} = \infty \cdot 2 = \infty.$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x+3}{x^2-1} =?$$

legyen $x = 1 - h$, ahol $h > 0$, ha $x \to 1-$ akkor $h \to 0+$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{4-h}{h^2-2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{4-h}{h(h-2)} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0+} \frac{4-h}{h-2} = \infty \cdot (-2) = -\infty.$$

Nevezetes határértékek

Gyökfüggvény: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ esetén és $n \in \mathbb{Z}^+$. Monoton növő, nem korlátos felülről.

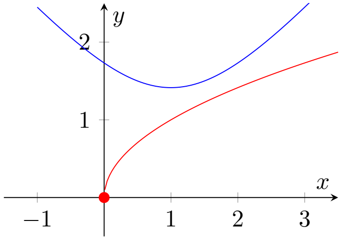
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

Példa:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{(x-1)^2 + 2} > \lim_{x\to\infty} \sqrt{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2\pm} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{11}$$



Nevezetes határértékek

Exponenciális függvény: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $\quad D_f = \mathbb{R}$.

$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty.$$

Példa: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-x^2+4x+1} = \text{”}2^{-\infty}\text{”} = 0$

Logaritmus függvény: $f(x) = \log_a(x)$, $\quad D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

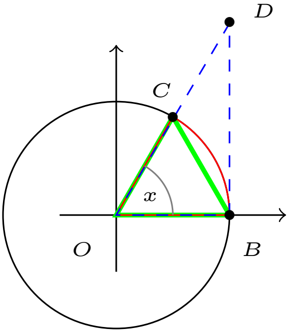
$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty \quad \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = -\infty.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = \infty.$$

Példa: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_2(x^2 - 2x + 3) = \text{”}\log_2(\infty)\text{”} = \infty$

Nevezetes határértékek – $\dfrac{\sin(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$



$$\begin{array}{ccccc}
T_{\triangle OCB}=\dfrac{\sin(x)\cdot 1}{2} & < & T_{\sphericalangle BC}=\dfrac{x}{2\pi}\cdot\pi & < & T_{\triangle OBD}=\dfrac{1\cdot \mathrm{tg}(x)}{2} \\[2ex]
\sin(x) & < & x & < & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \\[2ex]
1 & < & \dfrac{x}{\sin(x)} & < & \dfrac{1}{\cos(x)} \\[2ex]
\downarrow & & x \to 0 \;\downarrow & & \downarrow \\[2ex]
1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Rendőr-elv

Nevezetes határértékek – Az "e" szám

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ a függvény határértéke a végtelenben e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Példa.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\dfrac{2x+2}{x-1}} = (e^6)^2 = e^{12}.$$