Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

8. előadás:
Folytonosság, szakadási pontok
Szakadási helyek osztályozása,
Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai,
Hiperbolikusz függvények és inverzeik

Pontbeli folytonosság

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0-ban:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ekvivalens definíció:

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hasonlóan egyoldali folytonosság:

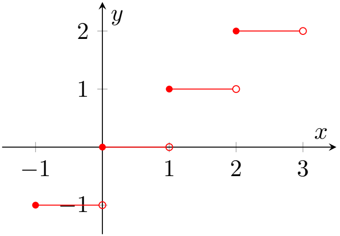
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **jobbról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **balról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

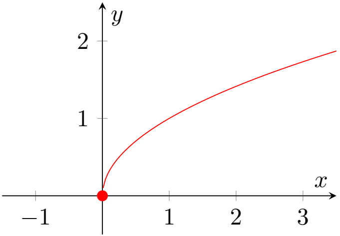
Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

Példák

$f(x) = [x]$ függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.



$f(x) = \sqrt{x}$ függvény a 0-ban csak jobbról folytonos, hiszen csak jobbról van értelmezve.



Függvények folytonossága – pontbeli folytonosság kiterjesztése

Definíció: Általában egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ **függvény folytonos**, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

Definíció: Az f függvény folytonos az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon, ha minden $x_0 \in (a, b)$ pontban folytonos, és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

Példák:

x, x^2, $|x|$, e^x, $\sin x$, $\dfrac{1}{x}$ folytonosak a teljes értelmezési tartományukon.

$[x]$ egészrész függvény csak az egész pontokon kívül folytonos. Az egész értékekben csak jobbról folytonos.

A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.

Példa

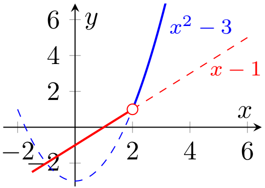
Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2-3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Példa

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

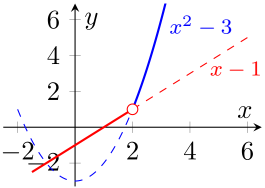
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2-3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



Példa

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2-3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



A függvény az $x \neq 2$ pontokban folytonos.
Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} x-1 = 1$$
$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} x^2-3 = 1,$$

A függvény pontosan akkor folytonos $x = 2$-ben, ha $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.
Tehát az kell, hogy $a = f(2) = 1$ legyen.

Függvények folytonossággal kapcsolatos tulajdonságai

Az $f: D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0-ban:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tétel: Egy adott x_0 pontban folytonos függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy a nevező nem 0) is folytonos az x_0 pontban.

Tétel: Ha a g függvény folytonos x_0-ban és f függvény folytonos a $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is folytonos x_0-ban.

Tétel: Ha az f függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor az f^{-1} inverz létezik és folytonos (és monoton).

Szakadási pontok

Ha egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény értelmezett az $(x_0-\varepsilon, x_0)$ és $(x_0, x_0+\varepsilon)$ intervallumon, de x_0-ban nem, vagy $x_0 \in D_f$ estén a függvény ott nem folytonos, akkor x_0 a függvény **szakadási pontja**.

Osztályozásuk:

Elsőfajú szakadások: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ létezik (valós szám)

- Megszűnetethető szakadás: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = H$ és $H \neq f(x_0)$ vagy $x_0 \notin D_f$
- Ugrás: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$

Másodfajú szakadások: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ és/vagy $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ nem létezik (esetleg $\pm\infty$)

- Pólus: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$

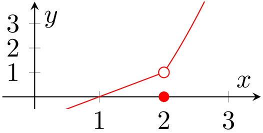
Szakadási helyek osztályozása

Elsőfajú szakadások: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ létezik

- Megszüntethető szakadás

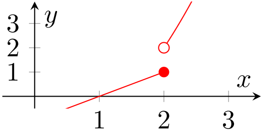
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = H \text{ és}$$

$$x_0 \notin D_f \text{ vagy } H \neq f(x_0).$$



- Ugrás

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

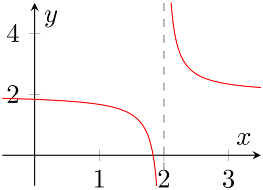


Másodfajú szakadás: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ és/vagy $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ nem létezik

- Pólus

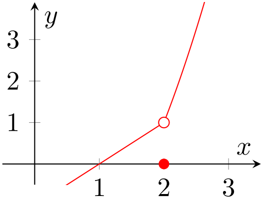
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty \quad \text{és}$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$$



- **Megszüntethető szakadás**

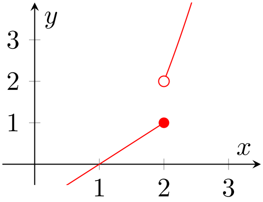
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \\ x^2-3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 2-} x-1 = 1 = \lim_{x \to 2+} x^2-3$$

- **Ugrás**

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \le 2 \\ x^2-2, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

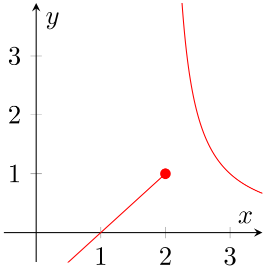


$$\lim_{x \to 2-} x-1 = 1 \neq \lim_{x \to 2+} x^2-2 = 2$$

- **Másodfajú szakadás**

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

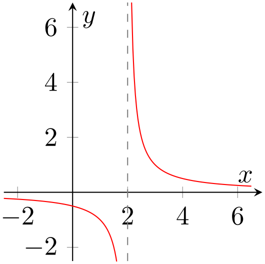
$$\lim_{x\to 2-} x-1 = 1, \quad \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$$



- **Pólus**

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ ha } x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

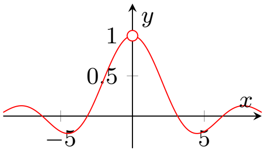


Példák

- Vizsgáljuk meg a $\frac{\sin(x)}{x}$ az $x_0 = 0$ környezetében. A függvény a 0-ban nincs értelmezve.

Nevezetes határérték, ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x}.$$

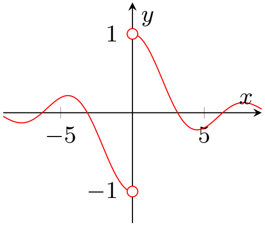


Megszűntethető szakadás $x_0 = 0$-ban.

- Vizsgáljuk meg a $\frac{\sin(x)}{|x|}$ az $x_0 = 0$ környezetében. A függvény a 0-ban nincs értelmezve.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{-x} = -1.$$



Ugrás van az $x_0 = 0$-ban.

Példák

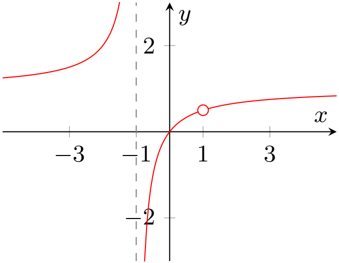
- Vizsgáljuk meg a $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ függvényt, mely az $x_0=\pm1$-ben nincs értelmezve.

$x_0 = 1$ környezetében

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1-}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Megszűntethető szakadás $x_0 = 1$-ben.



$x_0 = -1$ környezetében

$$\lim_{x\to -1+}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{0+}=-\infty,$$

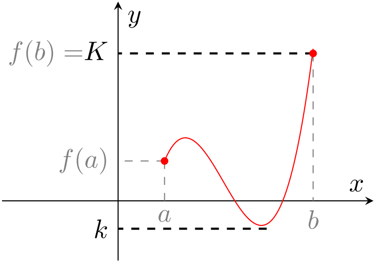
$$\lim_{x\to -1-}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{0-}=\infty.$$

Pólus van az $x_0 = -1$-ben.

Zárt intervallumon folytonos függvények

Tétel. Az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ **zárt intervallumon folytonos függvény korlátos**, azaz létezik $k, K \in \mathbb{R}$, hogy

$$k \leq f(x) \leq K \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$

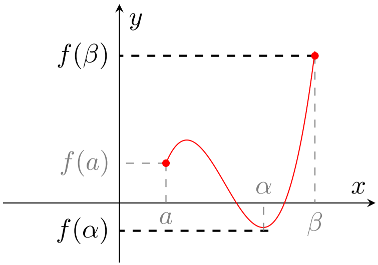


Lényeges, hogy az értelmezési tartomány zárt intervallum, pl: $f(x) = \frac{1}{x}$ a $(0,1]$ intervallumon nem korlátos.

Zárt intervallumon folytonos függvények

Weierstrass-tétel. Az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimum és maximum értékét, azaz van olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

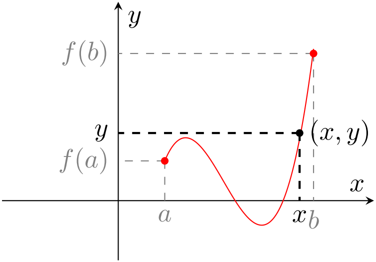
$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$



A zárt intervallum itt is lényeges, ha $f(x)$ függvényt csak az (a,b) intervallumon van értelmezve, akkor nincs megfelelő β ($\beta = b \notin (a,b)$).

Zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano-tétel. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zárt interallumon folytonos függvény az $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz, azaz ha $f(a) \leq y \leq f(b)$ vagy $f(b) \leq y \leq f(a)$, akkor létezik olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = y$.

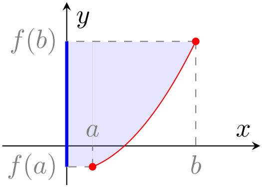


A folytonosság lényeges, mert pl. az egészrész függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket.

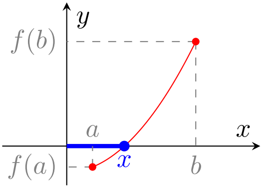
Zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano és Weierstrass tételének következménye.

(1) Zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a minimuma és a maximuma között minden értéket felvesz.



(2) Az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek, ha $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ (vagy fordítva), akkor f-nek létezik az intervallumban gyökhelye, azaz $\exists x \in (a, b)$, hogy $f(x) = 0$.



Hyperbolikus függvények

Sinus hyperbolikus:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ D_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, páratlan.

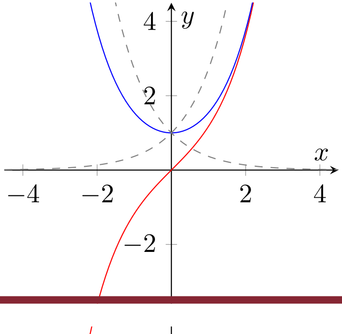
$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$$

Cosinus hyperbolikus:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ D_{\mathrm{ch}} = \mathbb{R}.$$

Alulról korlátos, páros.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$$



$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Hyperbolikus függvények

Tangens hyperbolikus:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)},\ D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, korlátos, páratlan.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{th}(x) = \pm 1$$

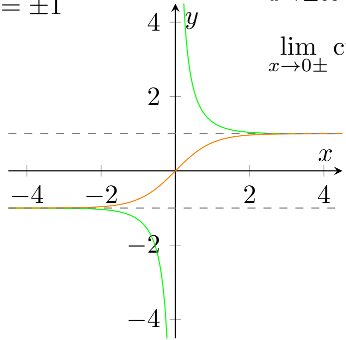
Cotangens hyperbolikus:

$$\operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)},\ D_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Monoton csökkenő, páratlan.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{cth}(x) = \pm 1$$

$$\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{cth}(x) = \pm\infty$$



Area függvények

Area sinus hyperbolikus:

$$\mathrm{sh}^{-1}(x) = \mathrm{arsh}(x),\ D_{\mathrm{arsh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, páratlan.

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{arsh}(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arsh}(x) = -\infty$$

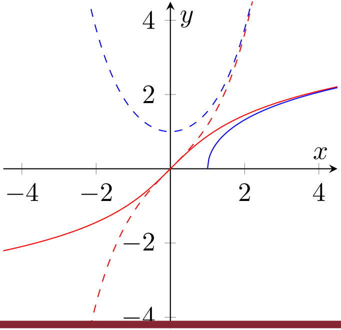
Area cosinus hyperbolikus:

$$\mathrm{ch}^{-1}(x) = \mathrm{arch}(x),\ D_{\mathrm{arch}} = [1,\infty).$$

Monoton növő.

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{arch}(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 1+} \mathrm{arch}(x) = 0$$



Area függvények logaritmikus alakja

Az sh függvény injektív, fejezzük ki az $\operatorname{sh}(x) = y$ egyenlet segítségével az inverz hozzárendelési szabályát:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= y \\
e^x - e^{-x} &= 2y \\
(e^x)^2 - 2y \cdot (e^x) - 1 &= 0 \\
a^2 - 2y \cdot a - 1 &= 0 \\
a_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} &= y \pm \sqrt{y^2+1} \quad = e^x, \text{ ha } y \pm \sqrt{y^2+1} > 0, \\
\ln(y + \sqrt{y^2+1}) &= x.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Area függvények

Area tangens hyperbolikus:

$$\mathrm{th}^{-1}(x) = \mathrm{arth}(x),$$

$$D_{\mathrm{arth}} = (-1, 1).$$

Monoton növő, páratlan.

$$\lim_{x \to 1-} \mathrm{arth}(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \to -1+} \mathrm{arth}(x) = -\infty$$

Area cotangens hyperbolikus:

$$\mathrm{cth}^{-1}(x) = \mathrm{arcth}(x)$$

$$D_{\mathrm{arcth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Monoton csökkenő, páratlan.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{arcth}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \pm 1 \mp} \mathrm{arcth}(x) = \pm\infty$$