Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

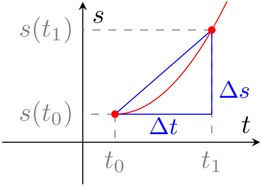
2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

9. elődás:
Differenciálszámítás,
Pontbeli derivált fogalma,
Differenciálási szabályok.

Differenciahányados

Motiváció a fizikából: mozgó pont sebessége.



$t \mapsto s(t)$: út-idő függvény

$v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ átlagsebesség a $[t_0, t_1]$-n

A mozgást a pillanatnyi sebesség jobban jellemzi:

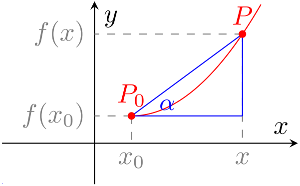
$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Az $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ függvény x_0-hoz tartozó **differenciahányados függvénye**

$$M_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ahol $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Ez a $\overline{PP_0}$ szelő meredeksége: $\mathrm{tg}(\alpha) = M_{x_0}(x)$.



A szelő egyenes egyenlete:

$$y = M_{x_0}(x)(x - x_0) + f(x_0).$$

Differenciálhányados

Definíció: Legyen az $f : D_f \to \mathbb{R}$ az x_0 környezetében értelmezett. Ha létezik

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

az f függvény x_0 pontbeli differenciahányados függvényének határértéke, akkor ezt a határértéket f x_0-beli **differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Jelölése: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$

Geometriai jelentés: a szelők "határmeredeksége" a görbéhez a legjobban simuló egyenes (**érintő**) meredeksége $(x_0, f(x_0))$ pontban.

Ha az f függvénynek létezik a differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor az f **differenciálható/deriválható/diffható az x_0-ban**.

Az f **függvény differenciálható**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Egy differenciálható f függvény **derivált függvénye**:

$$f' : x_0 \mapsto f'(x_0), \qquad x_0 \in D_f.$$

Egy példa

Legyen $f(x) = x^2$ függvény.

Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

A differenciahányados határértéke minden $x_0 \in \mathbb{R}$-ra

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0.$$

Így az f függvény derivált függvénye az $x_0 \mapsto 2x_0$ függvény.

Ezt így is írhatjuk:

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin(x)$ függvény.

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin(x)$ függvény. Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\sin(x_0)\cos h + \cos(x_0)\sin h - \sin(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0)\sin(h)}{h}$$

A deriváltja minden $x_0 \in \mathbb{R}$-ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0)\sin(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(x_0)\frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin(x_0)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h} =$$

$$= -\sin(x_0)\cdot 0\cdot 1 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0).$$

Tehát $(\sin x)' = \cos x$.

Egyoldali deriváltak (a differenciahányados féloldali határértéke)

Mivel a pontbeli derivált határérték, ezért lehet értelmezni jobb és bal oldali deriváltat:

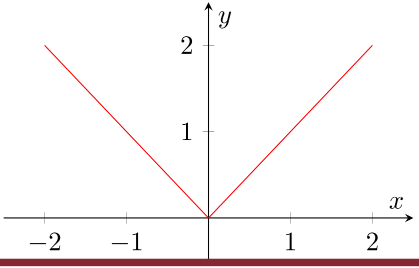
Az f függvény x_0 pontbeli jobb oldali deriváltja $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Az f függvény x_0 pontbeli bal oldali deriváltja $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$.

Példa: Legyen $f(x) = |x|$. Differenciahányadosa $x_0 = 0$-ban:

$$\frac{f(0\pm h)-f(0)}{\pm h} = \frac{|0\pm h|-|0|}{\pm h} \underset{h>0}{=} \frac{h}{\pm h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h>0 \\ -1, & \text{ha } h<0 \end{cases}$$

$h = 0$-ban nincs határértéke, de van jobb és bal oldali határérték:



Intervallumon definiált függvényderivált

Ha adott egy **lokális függvénytulajdonság** f-re, mely egy x_0 pontban jellemzi a függvényt (vizsgálva x_0 egy kicsi környezetét, ahol értelmezve van f), akkor ezt a tulajdonságot **vizsgálhatjuk** egy teljes zárt, nyílt, félig zárt vagy nem korlátos **intervallumon is**. (Hasonlóan a folytonossághoz.)

Az f függvény deriválható $(a,b) \subset D_f$-en, ha bármely $x_0 \in (a,b)$ belső intervallumpontban deriválható.

Az f függvény deriválható $[a,b] \subset D_f$-en, ha bármely $x_0 \in (a,b)$ belső intervallumpontban deriválható ÉS "a"-ban jobbról, "b"-ben balról deriválható.

Az f függvény deriválható $[a,\infty) \subset D_f$-en, ha bármely $x_0 \in (a,\infty)$ intervallumpontban folytonos ÉS "a"-ban jobbról deriválható.

Néhány fontos deriváltfüggvény

$$(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(x)' = 1, \qquad \text{valamint} \qquad (a \cdot x + b)' = a, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

$$\left(x^2\right)' = 2x,$$

továbbá belátható:

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sin(x))' = \cos(x), \quad \text{és hasonlóan belátható} \quad (\cos(x))' = -\sin(x),$$

később belátjuk még:

$$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel. Ha az f és g függvények deriválhatóak egy x pontban, akkor

- $c \cdot f$ is deriválható ($c \in \mathbb{R}$), és $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$,
- $f + g$ is deriválható, és $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $f - g$ is deriválható, és $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
- $f \cdot g$ is deriválható, és $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\dfrac{f}{g}$ is deriválható ($g(x) \neq 0$), és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Műveleti tulajdonságok bizonyítása

Bizonyítás.

- $(c \cdot f)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$
  $c \cdot f'(x_0)$,

- $(f \pm g)'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) \pm g(x) - f(x_0) \mp g(x_0)}{x - x_0}$
  $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

- $(f \cdot g)'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$
  $= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$

$$= g(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Példák:

Az x^3 deriváltja:

$$\left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = (x)' \cdot x^2 + x \cdot \left(x^2\right)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2.$$

A tangens deriváltja:

$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))'$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) =$$

$$\sin(x) + x \cos(x).$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7.$$

$$(x\sin(x))' = x'\cdot\sin(x)+x\cdot(\sin(x))' = 1\cdot\sin(x)+x\cdot\cos(x) =$$

$$\sin(x)+x\cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)}\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7.$$

$$(x\sin(x))' = x'\cdot\sin(x)+x\cdot(\sin(x))' = 1\cdot\sin(x)+x\cdot\cos(x) =$$

$$\sin(x)+x\cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)}\right)' = \frac{2x\cdot\cos(x)-x^2\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{2x\cos(x)+x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) =$$

$$\sin(x) + x\cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)}\right)' = \frac{2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{2x\cos(x) + x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

$$\left(\frac{\cos(x)}{x^2}\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7.$$

$$(x\sin(x))' = x'\cdot\sin(x)+x\cdot(\sin(x))' = 1\cdot\sin(x)+x\cdot\cos(x) =$$

$$\sin(x)+x\cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)}\right)' = \frac{2x\cdot\cos(x)-x^2\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{2x\cos(x)+x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

$$\left(\frac{\cos(x)}{x^2}\right)' = \frac{(-\sin(x))\cdot x^2-(\cos(x))\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x\sin(x)-2\cos(x)}{x^3}.$$