

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

11. előadás:
Derivált és monotonitás kapcsolata,
Lokális és abszolút szélsőértékek,
Szöveges szélsőértékfeladatok

Monotonitás

Az f függvény egy $I = (a, b) \subseteq D_f$ intervallumon

- **monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton csökken**, ha
$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
.
- **monoton**, ha $f(x)$ az I -n monoton nő vagy monoton csökken.
- **szigorúan monoton**, ha $f(x)$ az I -n szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Monotonitás és derivált

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re $\Leftrightarrow f$ monoton nő az I intervallumon.
- $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ -re $\Leftrightarrow f$ monoton csökken az I intervallumon.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- $f'(x) > 0$ minden $x \in I$ -re $\Rightarrow f$ szigorúan monoton nő az I intervallumon.
- $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ -re $\Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken az I intervallumon.

Szigorú monotonitásra csak az egyik irányban igaz a következtetés:

Például $f(x) = x^3$ szigorúan monoton nő: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, de $f'(0) = 0$.

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq 1$$

$$x \geq 0,$$

azaz az f függvény a $[0, +\infty)$ intervallumon monoton nő.

$$f'(x) \leq 0$$

$$e^x - 1 \leq 0$$

$$e^x \leq 1$$

$$x \leq 0,$$

azaz az f függvény a $(-\infty, 0]$ intervallumon monoton csökken.

Lokális szélsőérték

Definíció: Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **lokális maximumhely**, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén. A **lokális maximum** az $f(x_0)$ függvényérték.

Definíció: Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **lokális minimumhely**, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén. A **lokális minimum** az $f(x_0)$ függvényérték.

Lokális szélsőérték: lokális minimum vagy lokális maximum értéke, ami valamely értéke R_f -nek.

Lokális szélsőérték hely: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely, valamely pontja D_f -nek.

Megjegyzés:

Nem tesszük fel, hogy a függvény differenciálható a pontban, ettől még lehet ott szélsőértéke.

Például: $f(x) = |x|$ függvény lokális minimuma van $x_0 = 0$ -ban, de ott nem deriválható.

Lokális szélsőérték feltételei

Tétel (lokális szélsőérték szükséges feltétele): Ha az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, és az x_0 -ban differenciálható a függvény, akkor $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzés: Fordítva az $f'(x_0) = 0$ -ból nem következik, hogy x_0 -ban lokális szélsőérték van: például $f(x) = x^3$ függvény $x_0 = 0$ pontban.

Tovább vizsgálva a "lehetséges" szélsőértékhely környezetét:

Ha $f'(x_0) = 0$ és a függvény

$(x_0 - \delta, x_0)$ -ban $f'(x) > 0$ (azaz f szig. mon. nő) és

$(x_0, x_0 + \delta)$ -ban $f'(x) < 0$ (azaz f szig. mon. csökken),

akkor x_0 -ban lokális maximum van.

Ha $f'(x_0) = 0$ és a függvény

$(x_0 - \delta, x_0)$ -ban $f'(x) < 0$ (azaz f szig. mon. csökken) és

$(x_0, x_0 + \delta)$ -ban $f'(x) > 0$ (azaz f szig. mon. nő),

akkor x_0 -ban lokális minimum van.

Elégséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére:

$f'(x_0) = 0$, és a függvényderivált előjelet vált.

Példa

Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

Példa

Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

azaz a függvénynek csak a 0 pontban lehet szélsőértéke.

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét a 0 környezetében:

x	$x < 0$	0	$0 < x$
$f'(x)$	negatív ($e^x < 1$)	0	pozitív ($e^x > 1$)
$f(x)$	mon.csökk.	lok.min.	mon.nő

A derivált előjelet vált a 0-ban, negatívból pozitívba, tehát a függvény csökkenőből növekedőbe megy át, ezért az $x_0 = 0$ pont egy lokális minimumhelye a függvénynek.

A lokális minimum értéke: $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

Elégséges feltétel lokális szélsőértékre

Ha az f függvény kétszer differenciálható, és $f'(x_0) = 0$, és

$f''(x_0) < 0$, akkor x_0 -ban **lokális maximum** van
(f' pozitívból negatívba vált, azaz csökkenő).

$f''(x_0) > 0$, akkor x_0 -ban **lokális minimum** van
(f' negatívból pozitívba vált, azaz növekvő).

Megjegyzés: ha $f''(x_0) = 0$ nem tudjuk, van-e szélsőérték

$f(x) = x^4$ függvénynek $x_0 = 0$ -ban lokális minimuma van, de

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2, \text{ így } f''(0) = 0.$$

Példa

Van-a lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

Van-a lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

azaz a függvénynek csak a 0 pontban lehet szélsőértéke.

Vizsgáljuk meg a második derivált előjelét a 0-ban:

$$f''(x) = e^x, \quad f''(0) = e^0 = 1 > 0$$

A második derivált szigorúan pozitív a 0-ban, ezért az $x_0 = 0$ pont egy lokális minimumhelye a függvénynek.

A lokális minimum értéke: $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

Példa

Keressük az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei.

Példa

Keressük az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei.

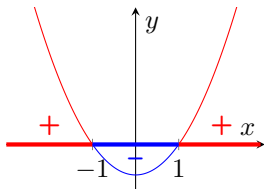
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \mp 1$$



x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon.nő.	lok.max.	mon.csökk.	lok.min.	mon.nő

Az $x_1 = -1$ -ben f' pozitívból negatívba vált \Rightarrow ez lokális maximumhely,
a lokális maximum értéke: $f(x_1) = f(-1) = 2$.

Az $x_2 = +1$ -ben f' negatívból pozitívba vált \Rightarrow lokális minimumhely,
a lokális minimum értéke: $f(x_2) = f(1) = -2$.

Példa

Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \quad \text{és} \quad f''(x) = 6x.$$

Az $x_1 = -1$ -ben $f''(x_1) = f''(-1) = -6 < 0$, \Rightarrow lokális maximumhely,
a lokális maximum értéke: $f(x_1) = f(-1) = +2$.

Az $x_2 = +1$ -ben $f''(x_2) = f''(+1) = +6 > 0$, \Rightarrow ez lokális minimumhely,
a lokális minimum értéke: $f(x_2) = f(+1) = -2$.

Összefoglalás

Szükséges feltétel: x_0 lokális szélsőérték, akkor $f'(x_0) = 0$

Elsőrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$ -ban $f'(x) < 0$,
 $(x_0, x_0 + \delta)$ -ban $f'(x) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$ -ban $f'(x) > 0$,
 $(x_0, x_0 + \delta)$ -ban $f'(x) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Másodrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Globális/abszolút szélsőértékek

Definíció: Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **globális/abszolút maximumhely**, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Definíció: Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **globális/abszolút minimumhely**, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

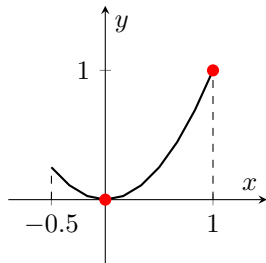
A globális minimum/maximum lehet lokális szélsőérték vagy az értelmezési tartomány szélén is.

Példa: (korlátos zárt intervallumon)

$f : [-0.5, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény

globális minimuma $x = 0$ -ban 0 , és

globális maximuma $x = 1$ -ben 1 .



Korlátos zárt intervallumon

Példa:

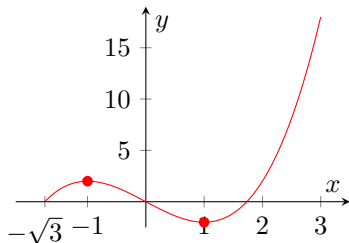
Keressük a globális szélsőértékeit: $f: [-\sqrt{3}, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$.

Korlátos zárt intervallumon

Példa:

Keressük a globális szélsőértékeit: $f: [-\sqrt{3}, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

Lokális szélsőértékek: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, azaz $x_{1,2} = \pm 1$ -ben.



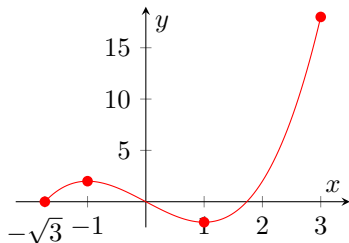
Lok. min.: $x_1 = 1$ pontban (-2) . Lok. max.: $x_2 = -1$ pontban (2) .

Korlátos zárt intervallumon

Példa:

Keressük a globális szélsőértékeit: $f: [-\sqrt{3}, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

Lokális szélsőértékek: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, azaz $x_{1,2} = \pm 1$ -ben.



Lok. min.: $x_1 = 1$ pontban (-2). Lok. max.: $x_2 = -1$ pontban (2).

Az intervallum széllein a függvény értéke:

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) = 0 \text{ és } f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$$

Így az abszolút minimumérték: -2 ($x = 1$ -ben),

és az abszolút maximumérték: 18 ($x = 3$ -ban).

Nem korlátos intervallum esete

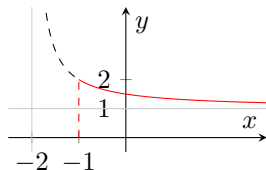
Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$

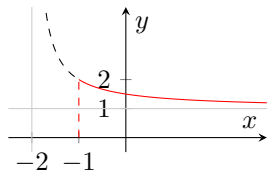


Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



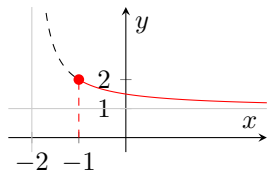
A lokális szélsőérték kereséséhez megnézzük a deriváltat: $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$. Ez nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték. Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



A lokális szélsőérték kereséséhez megnézzük a deriváltat: $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$. Ez nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték. Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az intervallum széléin:

$$f(-1) = 2 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1.$$

Tehát a globális maximumérték 2 ($x = -1$ -ben), míg globális minimum nincs, mert az 1-et nem veszi fel a függvény (ez a legnagyobb alsó korlát).

Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

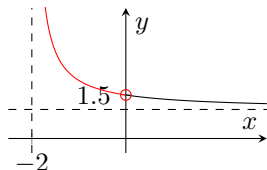
Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f: (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



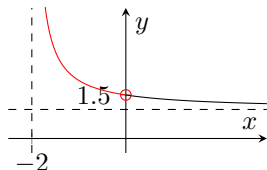
Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f: (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



A derivált: $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$, nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték.

Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

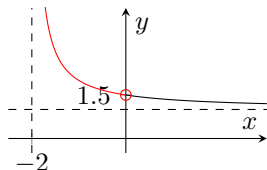
Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f: (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



A derivált: $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$, nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték.

Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az intervallum szélén:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3/2.$$

Tehát globális maximumérték nincs, mert a -2 jobb oldali környezetében nem korátos a függvény, míg globális minimuma sincs, mert a $3/2$ -et nem veszi fel a függvény (ez a legnagyobb alsó korlát az intervallumon).

Szöveges feladat

Határozzuk meg annak a hengernek a magasságát és az alapköre sugarát, mely 1 liter térfogatú, felül nyitott, és a felszíne a lehető legkisebb!

Szöveges feladat

Határozzuk meg annak a hengernek a magasságát és az alapköre sugarát, mely 1 liter térfogatú, felül nyitott, és a felszíne a lehető legkisebb!

Ha a henger alapjának a sugara r , és a magassága m , akkor a térfogata $r^2\pi m$, melynek 1-nek kell lennie (feltéve, hogy deciméterben mérjük a hosszakat):

$$r^2\pi m = 1,$$

ebből kifejezhetjük a magasságot:

$$m = \frac{1}{r^2\pi}.$$

A felszín nagysága, felhasználva a magasság kifejezését:

$$A = r^2\pi + 2\pi r m = r^2\pi + 2\pi r \frac{1}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{2}{r}.$$

Ennek az r -től függő kifejezésnek keressük a minimumát, ha $r > 0$, azaz az $r \in (0, \infty)$ nyílt, nem korlátos intervallumon.

Szöveges feladat – folytatás

Így az

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés minimumát keressük $r \in (0, \infty)$ -re.

Szöveges feladat – folytatás

Így az

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés minimumát keressük $r \in (0, \infty)$ -re.

Először lokális szélsőértékeket keresünk:

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{2}{r^2},$$

ami ha 0, akkor $2r_0\pi = \frac{2}{r_0^2}$, azaz $r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

A második derivált értéke:

$$A''(r) = 2\pi - (-2)\frac{2}{r^3} = 2\pi + \frac{4}{r^3},$$

ami az r_0 helyen:

$$A''(r_0) = A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0,$$

így ez valóban lokális minimum.

Szöveges feladat – folytatás

Mivel az $A(r)$ az $r \in (0, +\infty)$ esetén értelmes, ezen intervallum határain vizsgáljuk a határértékeket:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 \pi + \frac{2}{r} = \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \pi + \frac{2}{r} = \infty$$

Tehát az $r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ pontban globális minimum van.

Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha meggondoljuk, hogy az A függvény a $(0, r_0)$ intervallumban monoton csökken, míg az $(r_0, +\infty)$ intervallumban monoton nő.

Ebben az esetben a henger magassága:

$$m_0 = \frac{1}{r_0^2 \pi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 \pi} = \frac{1}{\pi^{1-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$