Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

12. előďás:
Konvex, konkáv ívek, Inflexiós pontok, Aszimptotikus vizsgálat, Polinomiális közelítés (Taylor-polinomok)

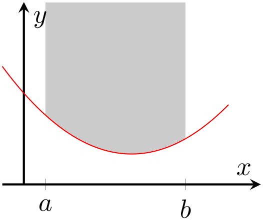
Konvexitás - ponthalmazra és függvényre

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ **ponthalmaz konvex**, ha bármely $P, Q \in K$ pontra a PQ szakasz teljes egészében benne van a K-ban.

Definíció 1.: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon **konvex**, ha a grafikonja feletti tartomány

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$

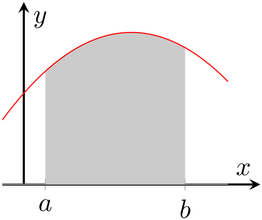
mint ponthalmaz konvex.



Hasonlóan az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon **konkáv**, ha a grafikonja alatti tartomány:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$

mint ponthalmaz konvex.



Ekvivalens definíciók függvény konvexitására

Definíció 2.: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha minden $x_1, x_2 \in [a, b]$-re az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \text{ minden } \lambda \in [0, 1]\text{-re.}$$

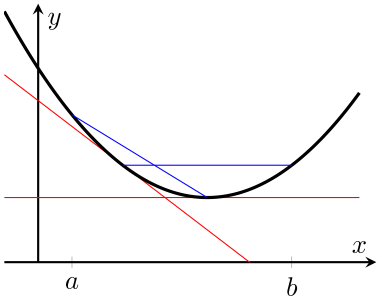
Definíció 3.: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha a függvénygrafikon az érintő felett halad minden $x_0 \in [a, b]$-re, azaz

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ minden } x, x_0 \in [a, b] \text{ esetén.}$$

Tétel (konvexitás vizsgálata): Ha az érintő meredeksége, az $f'(x)$ monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumon, azaz

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b],$$

akkor a függvény az intervallumon **konvex**.



Ekvivalens definíciók függvény konkávitására

Definíció 2.: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha minden $x_1, x_2 \in [a,b]$-re az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \le f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \text{ minden } \lambda \in [0,1]\text{-re.}$$

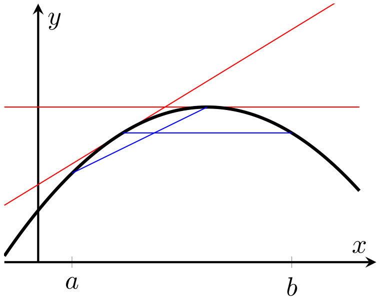
Definíció 3.: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha a függvénygrafikon az érintő alatt halad minden $x_0 \in [a,b]$-re, azaz

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ minden } x, x_0 \in [a,b] \text{ esetén.}$$

Tétel (konvexitás vizsgálata): Ha az érintő meredeksége, az $f'(x)$ monoton csökkenő az $[a,b]$ intervallumon, azaz

$$f''(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b],$$

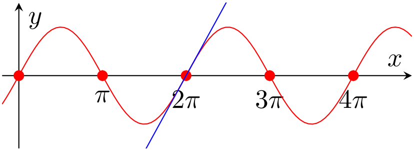
akkor a függvény az intervallumon **konkáv**.



Inflexiós pont

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D_f$ pontja **inflexiós pont**, ha a függvény x_0-ban konvexitást vált, azaz előtte, az $(x_0 - \delta, x_0)$-on konkáv, utána, az $(x_0, x_0 + \delta)$-on konvex vagy fordítva.

Példa: A $\sin(x)$-nek a π egész számú többszöröseiben van inflexiós pontja.



Megjegyzés: Ha a függvény differenciálható, akkor az inflexiós pontban az érintő meredeksége növekvőből csökkenőbe (vagy fordítva) megy át. Ez csak úgy lehetséges, ha az inflexiós pontban az érintő egyenese átmetszi a függvénygrafikont.

Inflexió létezésének feltételei

Tétel (inflexió szükséges feltétele): Ha az $x_0 \in D_f$ inflexiós pontja f-nek, és x_0-ban létezik a függvény második deriváltja, akkor

$$f''(x_0) = 0.$$

Megjegyzés: Ez visszafelé nem feltétlenül igaz, ha $f(x) = x^4$, akkor $f''(x) = 12x^2$ így $f''(0) = 0$, de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).

Ha $f''(x_0) = 0$ és a függvény
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f''(x) > 0$ (f' szig. mon. nő azaz f konvex) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f''(x) < 0$ (f' szig. mon. csökken azaz f konkáv),
vagy
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f''(x) < 0$ (f' szig. mon. csökken azaz f konkáv) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f''(x) > 0$ (f' szig. mon. nő azaz f konvex),
akkor x_0-ban inflexiós pont van.

Elégséges feltétel a inflexió létezésére:
$f''(x_0) = 0$ és a második függvényderivált előjelet vált.

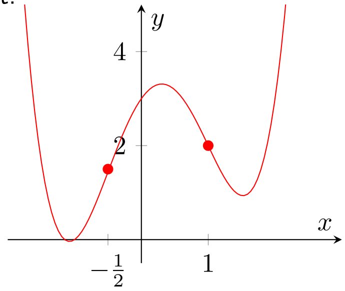
Példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitását!

Példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitását!

Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:



$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 6x - 6 \end{aligned}$$

A második derivált nullhelyei:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 - 6x - 6 &= 0 \\ 2x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1 \text{ ill. } -\frac{1}{2}.$$

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex

Elégséges feltétel inflexió létezésére

Ha az f függvény háromszor differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, és

$f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0-ban **inflexió** van.

$f'''(x_0) > 0$, akkor x_0-ban a függvény konkávból vált konvexbe.

$f'''(x_0) < 0$, akkor x_0-ban a függvény konvexből vált konkávba.

Megjegyzés: visszafelé ez nem igaz, mert $f(x) = x^5$ függvénynek $x_0 = 0$-ban inflexiója van, de

$f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$, $f'''(x) = 60x^2$, így $f'''(0) = 0$.

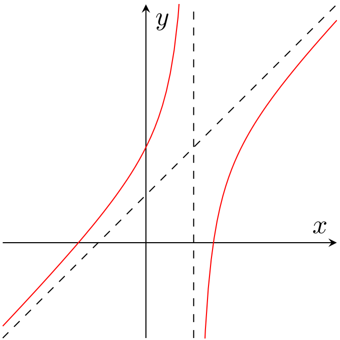
Az előző példában viszont működik: $f'''(x) = 24x - 6$, $f'''(-1/2) = -18$ (konvexből konkávba vált) és $f'''(1) = 18$ (konkávból konvexbe vált), mindkét helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Aszimptoták

Definíció: Az **aszimptota** olyan egyenes, melyhez a függvény grafikonja az egyenes mentén a végtelenbe távolodva tetszőlegesen közel kerül.

Az egyenes helyzetéből adódóan háromféle aszimptótát különböztetünk meg:

- függőleges aszimptota
- vízszintes aszimptota
- ferde aszimptota



Függőleges aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **függőleges aszimptotája** van az x_0 pontban, ha

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

Esetleg mindkettő teljesül. Ekkor az $x = x_0$ egyenletű függőleges egyenes az aszimptota.

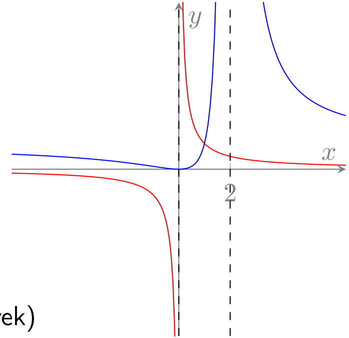
Példák:

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban függőleges aszimptotája van.

Egyenlete: $x = 0$.

Az $f(x) = \left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban függőleges aszimptotája van.

Egyenlete: $x = 2$.



Megjegyzés: A pólusokban (szakadási helyek) is ilyen aszimptóták vannak.

Vízszintes aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **vízszintes aszimptotája** van, ha a függvény határértéke a ∞-ben vagy $-\infty$-ben egy valós szám. Ha

$$\lim_{x\to(-)\infty} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

akkor az $y = a$ egyenletű vízszintes egyenes a vízszintes aszimptotája a grafikonnak.

Példa:

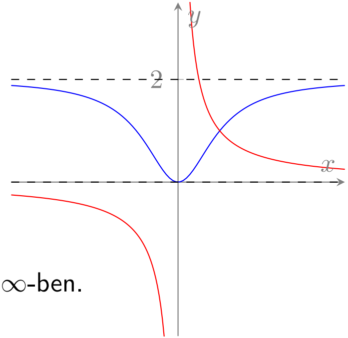
Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek a végteleneben vízszintes aszimptotája van.

Egyenlete: $y = 0$.

Az $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ függvényre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az $y = 2$ a vízszintes aszimptotája a $+\infty$-ben.
A $-\infty$-ben hasonlóan ugyanez az egyenes.



Ferde aszimptota

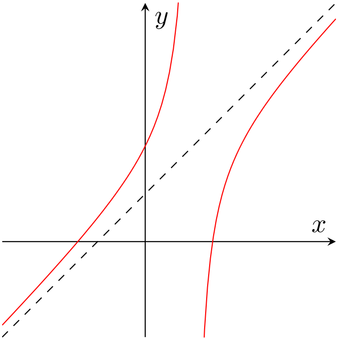
Az $f(x)$ függvénynek **ferde aszimptotája** van, ha a függvénygrafikon az $y = ax + b$ egyeneshez „simul” a végtelenben.

Az a és a b együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

A $-\infty$-ben hasonlóan számítható.



Ha valamelyik határérték nem létezik
vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.

Példák

Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$ függvény ferde aszimptotájának egyenletét!

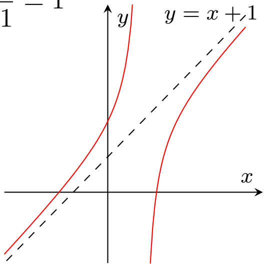
Példák

Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$ függvény ferde aszimptotájának egyenletét!

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 2/x^2}{1 - 1/x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2}{x - 1} = 1$$



Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = x + 1$.

Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Magasabbrendű deriváltak (ismétlés)

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) valós függvény **másodrendű/második deriváltja** az $f'(x)$ függvény deriváltja.

Jel: $f''(x)$ vagy $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$, egy x_0 pontban $f''(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$

Definíció: Hasonlóan f n-**edrendű/**n-**edik deriváltja** az $(n-1)$-edrendű deriváltnak a deriváltja.

Jel: $f^{(n)}(x)$ vagy $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$, egy x_0 pontban $f^{(n)}(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{d^n f(x)}{nx^2}\right|_{x=x_0}$

Példa: $f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \dots$

Közelítő polinomok

Olyan polinomot definiálunk, mely egy adott f, elég sokszor diffható függvényt valamely $x_0 \in D_f$ hely közelében megfelelően jól közelít.

Lineáris polinomra $p(x) = ax + b$, két együtthatót kell meghatározni.

Legyen a közelítő polinomnak és a függvénynek közös pontja $(x_0, f(x_0))$, azaz

$$p(x_0) = f(x_0).$$

Legyen a polinom és a függvény meredeksége azonos az x_0 helyen, azaz

$$p'(x_0) = f'(x_0).$$

Ezt a két feltételt teljesíti a $p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ érintőegyenes.

Pl: $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$, akkor $p(x) = \cos(0)(x - 0) + 0 = x$.

Közelítő polinomok

Általában keressük $p(x) = a_n(x-x_0)^n + \ldots + a_1(x-x_0) + a_0$ polinomot, illetve annak $a_n, \ldots, a_1, a_0$ együtthatóit, úgy hogy

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0),\ p''(x_0) = f''(x_0), \ldots, p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Ha $p(x_0) = f(x_0)$, akkor

$$p(x_0) = a_n 0^n + \ldots + a_1 0 + a_0 = a_0 = f(x_0).$$

Ha $p'(x_0) = f'(x_0)$, akkor

$$p'(x_0) = a_n \cdot n \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 2 \cdot 0 + a_1 = a_1 = f'(x_0).$$

Ha $p''(x_0) = f''(x_0)$, akkor

$$p''(x_0) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + a_2 \cdot 2 = 2a_2 = f''(x_0).$$

$$\vdots$$

Ha $p^n(x_0) = f^n(x_0)$, akkor

$$p^n(x_0) = a_n \cdot n \cdot \ldots 2 \cdot 1 = n! \cdot a_n = f^{(n)}(x_0).$$

Tehát

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0), \ldots,\ a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Taylor-polinom

Definíció: Az f függvény n-ed rendű Taylor-polinomja az $x_0 \in D_f$ helyen, ha ott a függvény legalább n-szer deriválható:

$$T^n_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Példa: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x - 1$ polinom.

$$\begin{aligned}
f(0) &= x^3 - 3x^2 - 7x - 1|_{x=0} = -1 && \Rightarrow && T^0_{f,0} = -1 \\
f'(0) &= 3x^2 - 6x - 7|_{x=0} = -7 && \Rightarrow && T^1_{f,0} = -7x - 1 \\
f''(0) &= 6x - 6|_{x=0} = -6 && \stackrel{:2!}{\Rightarrow} && T^2_{f,0} = -3x^2 - 7x - 1 \\
f'''(0) &= 6|_{x=0} = 6 && \stackrel{:3!}{\Rightarrow} && T^3_{f,0} = x^3 - 3x^2 - 7x - 1 \\
f^{(4)}(0) &= f^{(k)}(0) = 0,\ k \geq 4 && \stackrel{:k!}{\Rightarrow} && T^k_{f,0} = T^4_{f,0} = T^3_{f,0}
\end{aligned}$$

$T^3_{f,0} = f(x)$, n-ed fokú polinom $\geq n$-ed rendű Taylor-polinomja önmaga.

Példa

$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$, akkor

$T^1_{\sin,0}(x) = \cos(0)(x-0) + 0 = x, \quad$ (érintő)

$$T^2_{\sin,0}(x) = \frac{-\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = 0 \cdot x^2 + x + 0 = x,$$

$$T^3_{\sin,0}(x) = \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 - \frac{\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = \\ = -\frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0,$$

$T^4_{\sin,0}(x) = T^3_{\sin,0}(x),$

$T^5_{\sin,0}(x) = \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + x \quad$ stb.