

# Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar  
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

[belus@math.bme.hu](mailto:belus@math.bme.hu)

[geometria.math.bme.hu/bela-szilvia](https://geometria.math.bme.hu/bela-szilvia)

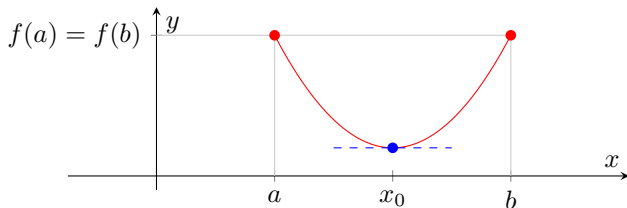
# 13. előadás: Középértéktételek, L'Hospital-szabály

## Rolle-tétel

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon folytonos, és az  $(a, b)$  intervallumon differenciálható, és  $f(a) = f(b)$ , akkor van olyan  $x_0 \in (a, b)$ , hogy  $f'(x_0) = 0$  (az érintő vízszintes).

**Bizonyítás:**

A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált ott nulla.



## Lagrange-tétel

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon folytonos, és az  $(a, b)$  intervallumon differenciálható, akkor van olyan  $x_0 \in (a, b)$ , hogy

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

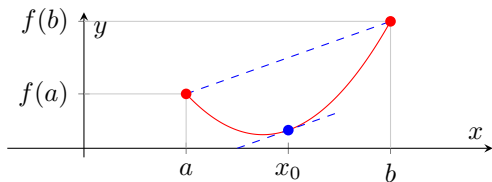
azaz létezik olyan érintő, mely a grafikondarab végpontjait összekötő szakasszal párhuzamos.

**Bizonyítás:** A Rolle-tételt alkalmazzuk a következő függvényre

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ekkor  $F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) = F(a)$ . Így létezik  $x_0 \in (a, b)$

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



## Cauchy-tétel

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények az  $[a, b]$  intervallumon folytonosak, az  $(a, b)$ -n differenciálhatóak és  $g'(x) \neq 0$  bármely  $x \in (a, b)$  esetén, akkor van olyan  $x_0 \in (a, b)$ , hogy

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Bizonyítás:** A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$$

függvényre, mivel

$$F(b) - F(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0,$$

tehát  $F(b) = F(a)$ . Ekkor létezik  $x_0 \in (a, b)$ , hogy

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) = 0 \quad \iff \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

## L'Hospital-szabály

Bernoulli–L'Hospital-szabály a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  határérték kiszámítására.

**Tétel:** Az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények differenciálhatóak az  $x_0$  egy nyílt környezetében (esetleg  $x_0$ -ban nem). Tegyük fel, hogy ebben a környezetben  $g'(x) \neq 0$  ha  $x \neq x_0$ . Ekkor, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty,$$

és létezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  is létezik és " $A$ "-val egyenlő.

**Megjegyzés 1.:** Az " $A$ " valós szám vagy  $\pm\infty$  is lehet.

**Megjegyzés 2.:** Az  $x_0$ -ban féloldali vagy a  $\pm\infty$ -ben is számolhatunk így határértéket.

## L'Hospital-szabály

**Bizonyítás:** Abban az esetben, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Legyen  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  (azaz  $x < x_0$ ), és ha  $x_0$ -ban  $f$  vagy  $g$  nem folytonosak, értelmezzük a függvényeket úgy, hogy

$$f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0 \quad \text{és} \quad g(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = 0.$$

Ekkor már  $f$  és  $g$  folytonosak  $x_0$ -ban is, tehát  $[x, x_0]$ -on is.

Mivel  $f$  folytonos  $[x, x_0]$  zárt intervallumon és diffható  $(x, x_0)$ -ban, ezért a Cauchy-tételt felhasználva létezik  $\xi \in (x, x_0)$ , hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{f(x_0)=0 \\ \text{és} \\ g(x_0)=0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \underset{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{akkor} \\ \xi \rightarrow x_0}}{=} \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ha  $x > x_0$  hasonlóan.

## Példa

Mennyi a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$  határérték?

Ekkor, ha

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{és} \quad g(x) = x,$$

akkor a 0-ban

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

A deriváltak

$$f'(x) = e^x \quad \text{és} \quad g'(x) = 1.$$

Így

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ezért alkalmazhatjuk a L'Hospital- szabály

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



## Megjegyzés

Csak akkor működik a szabály, ha a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  határérték létezik.

Ha nem létezik, attól még a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  létezhet, például:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sin x, & g(x) &= x, \\ f'(x) &= 1 + \cos x, & g'(x) &= 1. \end{aligned}$$

Tehát  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \cos x$ , ami nem létezik.

De  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1$ .

## Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \dots = A$$

Példa:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$

## Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \dots = A$$

Példa:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - x - 1 = e^0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x - x - 1 & g(x) = x^2 \\ f'(x) = e^x - 1 & g'(x) = 2x \\ f''(x) = e^x & g''(x) = 2 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$

## Példák

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

## Példák

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$  típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

## Példák

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$  típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

## Példák

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$  típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$  típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0,$$

tehát  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ .

## Más kritikus esetek, ahol a L'Hospital-szabály alkalmazható

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani. Például:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = "0 \cdot \infty" = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Például

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-2x} = "\infty \cdot 0" = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0.$$

Vagy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln(x) = "0 \cdot -\infty" &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0. \end{aligned}$$



## Más kritikus esetek, ahol a L'Hospital-szabály alkalmazható

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani. Például két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \text{"}\infty - \infty\text{"} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - f(x)}{f(x)g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \text{"}\infty - \infty\text{"} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln(x) + \frac{(x-1)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x\ln(x) + x-1} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\ln(x) + x\frac{1}{x} + 1} = -\frac{1}{2}$$

A tört deriválása és a L'Hospital-szabály két különböző dolog!

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Nem szabad összekeverni!**