Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

15. előadás: Primitív függvény, határozatlan integrál, alapintegrálok, műveleti tételek

Primitív függvény

Definíció: Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény **primitív függvénye** az $I \subseteq D_f$ nyílt intervallumon, ha ott F deriválható és $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$-re.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:

$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ jó

vagy

$F(x) = x^3 + 1$ esetén $F'(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2 + 0$,

sőt bármilyen $c \in \mathbb{R}$-re $F(x) = x^3 + c$ jó

$$F'(x) = (x^3 + c)' = 3x^2 + 0 = f(x).$$

Primitív függvény

Tétel: Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + c$. Azaz a primitív függvény konstans erejéig egyértelmű.

Tekintsük az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $I \subseteq D_f$ intervallumon

$$\mathcal{F} = \{F(x) \,|\, F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I\}.$$

Ezt a függvényhalmazt f **határozatlan integráljának** nevezzük az I intervallumon.

Jelölése:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Példa:

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = \{x^3 + c \,|\, c \in \mathbb{R}\} = x^3 + c.$$

Folytonosság és integrálhatóság

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Indolkás később.

Habár a folytonosság elégséges feltétele a primitív függvény létezésének, ez nem jelenti azt, hogy elemi függvények segítségével felírható a primitív függvény.

Például az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, hiszen folytonos, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) - g(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x - \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int c f(x) \,\mathrm{d}x = c \int f(x) \,\mathrm{d}x \qquad c \in \mathbb{R}$$

A deriválási szabályok megfordításából következnek.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1\,\mathrm{d}x = x + c$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = x^n + c$$

$$\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}x^n + c, \qquad \text{ha } n \neq 0$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \qquad \text{ha } n \neq -1$$

Tudjuk, hogy $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c, \qquad \text{ha } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, \qquad \text{ha } x \neq 0$$

Elemi függvények integráljai – táblázat

f	$\int f \,\mathrm{d}x$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	
e^x	$e^x + c$	
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x) + c$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x) + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}(x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$\lvert x\rvert < 1$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\int 3\sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \, \mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\int 3\sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int 3\sin(x) + \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -3\cos(x) + \sqrt{2}\,\mathrm{arsh}(x) + c$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$f'(x) = \cos(x)$ és $f(0) = 5.$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$f'(x) = \cos(x)$ és $f(0) = 5.$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x) + c$$

$$f(0) = \sin(0) + c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

$$f(x) = \sin(x) + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$f''(x) = x$ és $f'(2) = 1$ és $f(1) = 0$.

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + c_1 = 2 + c_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - x + c_2 = \frac{x^3}{6} - x + c_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + c_2 = -\frac{5}{6} + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$