

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

17. előadás: Parciális törtekre bontás

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

Két polinom hányadosát szeretnénk integrálni

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} dx.$$

Az ilyen típusú függvények integrálására van általános módszer.

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

Két polinom hányadosát szeretnénk integrálni

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} dx.$$

Az ilyen típusú függvények integrálására van általános módszer.

1. Polinomosztással elérjük, hogy a számláló kisebb fokú legyen, mint a nevező. Ha $p(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + \dots + c_1x + c_0) \cdot q(x) + r(x)$

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c_{n-m}x^{n-m} + \dots + c_1x + c_0 dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx,$$

ahol $\deg r(x) < \deg q(x)$. Az osztás eredménye polinom, amit külön integrálhatunk. Az $\frac{r(x)}{q(x)}$ törtet tovább alakítjuk integrálható résztörtekké.

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) =$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline - 2x^2 + 3x + 5 \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 - 2x \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ - 2x^2 + 3x + 5 \\ \underline{- 2x^2 + 4x} \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 - 2x \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline - 2x^2 + 3x + 5 \\ - 2x^2 + 4x \\ \hline - x + 5 \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 - 2x - 1) \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ - 2x^2 + 3x + 5 \\ \underline{- 2x^2 + 4x} \\ x + 5 \\ \underline{- x + 2} \\ 3 \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline - 2x^2 + 3x + 5 \\ - 2x^2 + 4x \\ \hline - x + 5 \\ - x + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline - 2x^2 + 3x + 5 \\ - 2x^2 + 4x \\ \hline - x + 5 \\ - x + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 3x + 5 : (x - 2) = (x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline - 2x^2 + 3x + 5 \\ - 2x^2 + 4x \\ \hline x + 5 \\ - x + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx &= \int x^2 - 2x - 1 dx + \int \frac{3}{x - 2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \int \frac{3}{x - 2} dx \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx = \int \frac{r(x)}{b_m \cdot (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + \beta x + \gamma)^l \dots} dx$$

Itt α_1, α_2 , a számláló k_1, k_2, \dots -szeres gyökei.

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx = \int \frac{r(x)}{b_m \cdot (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + \beta x + \gamma)^l \dots} dx$$

Itt α_1, α_2 , a számláló k_1, k_2, \dots -szeres gyökei.

3. A törtet felírjuk egyszerűbb törtek összegeként. Minden " α " k -szoros gyökhöz

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}$$

résztörteket vesszük, minden $(x^2 + \beta x + \gamma)^l$ irreducibilis l -szeres másodfokú tényezőre

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + \beta x + \gamma)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{B_l x + C_l}{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}$$

Ezeket a törteket már tudjuk integrálni.

Előző példa befejezése

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

Előző példa befejezése

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx &= \int x^2 - 2x - 1 dx + \int \frac{3}{x - 2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \int \frac{3}{x - 2} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{3}{x - 2} dx = 3 \int \frac{1}{x - 2} dx = 3 \int \underbrace{\frac{A}{(x - \alpha)^k}}_{\alpha=2, k=1, A=1} dx = 3 \ln |x - 2| + c$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3 \ln |x - 2| + c$$

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$,

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a rész törtek

$$x^2 = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k=2} : \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2},$$

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a rész törték

$$x^2 = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k=2} : \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \quad (x^2 + 1) = \underbrace{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1, l=1} : \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a rész törték

$$x^2 = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k=2} : \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \quad (x^2 + 1) = \underbrace{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1, l=1} : \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

így a teljes törtet a rész törték összegével tesszük egyenlővé

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} =$$

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztrtek

$$x^2 = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k=2} : \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \quad (x^2 + 1) = \underbrace{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1, l=1} : \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

így a teljes törtet a résztrtek összegével tesszük egyenlővé

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + (Bx + C)x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1(x^3 + x) + A_2(x^2 + 1) + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{(A_1 + B)x^3 + (A_2 + C)x^2 + A_1x + A_2}{x^2(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a rész törték

$$x^2 = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k=2} : \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \quad (x^2 + 1) = \underbrace{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1, l=1} : \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

így a teljes törtet a rész törték összegével tesszük egyenlővé

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + (Bx + C)x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1(x^3 + x) + A_2(x^2 + 1) + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{(A_1 + B)x^3 + (A_2 + C)x^2 + A_1x + A_2}{x^2(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

A közös nevező megegyezik $f(x)$ nevezőjével, így a számlálót egyeztetve

$$1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 2 = (A_1 + B)x^3 + (A_2 + C)x^2 + A_1x + A_2$$

Példa

Legyen $f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a rész törték

$$x^2 = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k=2} : \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \quad (x^2 + 1) = \underbrace{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1, l=1} : \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

így a teljes törtet a rész törték összegével tesszük egyenlővé

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + (Bx + C)x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1(x^3 + x) + A_2(x^2 + 1) + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{(A_1 + B)x^3 + (A_2 + C)x^2 + A_1x + A_2}{x^2(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

A közös nevező megegyezik $f(x)$ nevezőjével, így a számlálókat egyeztetve

$$1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 2 = (A_1 + B)x^3 + (A_2 + C)x^2 + A_1x + A_2 \quad \text{azaz}$$
$$A_1 + B = 1, \quad A_2 + C = 0, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = -2 \quad \longrightarrow \quad B = 2, \quad C = 2.$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx =$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = \end{aligned}$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| \end{aligned}$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| - 2\frac{x^{-1}}{-1} \end{aligned}$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| - 2\frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x^2 + 1| \end{aligned}$$

Példa

Ha $A_1 = -1$, $A_2 = -2$, $B = 2$, $C = 2$,

$$\text{akkor } f(x) = \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = \\ &= -\ln|x| - 2\frac{x^{-1}}{-1} + \ln|x^2 + 1| + 2\arctg(x) + c. \end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

4. Integráljuk a résztörteket. A különböző résztörtekre vonatkozó integrálási technikák segítségével:

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)} dx = A \ln |x - \alpha| + c,$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx \stackrel{k > 1}{=} A \frac{(x - \alpha)^{-k+1}}{-k + 1} + c = \frac{A}{1 - k} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}} + c,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)} dx + \int \underbrace{\frac{C^*}{(x + \beta/2)^2 + \gamma^*}}_{\text{teljes négyzet}} dx = \\ &= \frac{B}{2} \ln |x^2 + \beta x + \gamma| + \frac{C^*}{\sqrt{\gamma^*}} \cdot \arctg \left(\frac{x + \beta/2}{\sqrt{\gamma^*}} \right) + c \\ &\quad \uparrow \\ &\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + c \quad \text{alapján} \end{aligned}$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \ln |x-2| + c$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \ln |x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = 5 \int (x-2)^{-4} dx = 5 \frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3} \frac{1}{(x-2)^3} + c$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \ln |x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = 5 \int (x-2)^{-4} dx = 5 \frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3} \frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx \quad \text{irreducibilis másodfokú nevező: } D = \sqrt{4-8}$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \ln |x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = 5 \int (x-2)^{-4} dx = 5 \frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3} \frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx \quad \text{irreducibilis másodfokú nevező: } D = \sqrt{4-8}$$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{(x-1)^2+1}, \text{ így}$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \ln |x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = 5 \int (x-2)^{-4} dx = 5 \frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3} \frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx \quad \text{irreducibilis másodfokú nevező: } D = \sqrt{4-8}$$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{(x-1)^2+1}, \text{ így}$$

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx = \ln |x^2-2x+2| + c$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \ln |x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4} dx = 5 \int (x-2)^{-4} dx = 5 \frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3} \frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx \quad \text{irreducibilis másodfokú nevező: } D = \sqrt{4-8}$$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{(x-1)^2+1}, \text{ így}$$

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx = \ln |x^2-2x+2| + c$$

$$\int \frac{-2}{(x-1)^2+1} dx = -2 \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx = -2 \cdot \operatorname{arctg}(x-1) + c.$$

Két polinom hányadosának integrálása:

1. Polinomosztás. (ha szükséges)
2. A nevező szorzattá alakítása.
3. Résztörtek felírása.
4. Résztörtek integrálása.

További példák

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = ?$$

1. Polinomosztásra nincs szükség.
2. Nevező szorzatalakja:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = \underbrace{(x - \alpha_1)^{k_1}}_{\alpha_1=1, k_1=1} \underbrace{(x - \alpha_2)^{k_2}}_{\alpha_2=-1, k_2=1}$$

3. Résztörtek:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx &= \int \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} dx = \\ &= \int \frac{(A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2)}{(x-1)(x+1)} dx \end{aligned}$$

$\begin{matrix} = \\ A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 - A_2 = 1 \\ A_1 = 1/2, A_2 = -1/2 \end{matrix}$

4. Integrálás:

$$= \frac{1}{2} (\ln |x - 1| - \ln |x + 1|) + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c$$

További példák

$$\int \frac{-5x + 6}{x^2 + x - 2} dx = ?$$

1. Polinomosztásra nincs szükség.
2. Nevező szorzatalakja:

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) = \underbrace{(x - \alpha_1)^{k_1}}_{\alpha_1=1, k_1=1} \underbrace{(x - \alpha_2)^{k_2}}_{\alpha_2=-2, k_2=1}$$

3. Résztörtek:
$$\frac{-5x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 2} = \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x - 1)(x + 2)}$$

$$A_1 + A_2 = -5 \quad 2A_1 - A_2 = 6 \quad \longrightarrow \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{-16}{3}.$$

4. Integrálás:

$$\int \frac{-5x + 6}{x^2 + x - 2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{16}{3} \int \frac{1}{x + 2} dx = \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{16}{3} \ln|x + 2| + c.$$

További példák

$$\int \frac{x^4 - 6}{x^4 + 2x^2} dx = ?$$

1. Polinomosztás. $\frac{x^4 - 6}{x^4 + 2x^2} = 1 + \frac{-2x^2 - 6}{x^4 + 2x^2}$

2. Nevező szorzatalakja: $x^4 + 2x^2 = x^2(x^2 + 2) = \underbrace{(x - \alpha)^k}_{\alpha=0, k_1=2} \underbrace{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=2, l=1}$

3. Résztörtek:

$$\frac{-2x^2 - 6}{x^4 + 2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} = \frac{A_1x^3 + 2A_1x + A_2x^2 + 2A_2 + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2 + 2)}$$

$$A_1 + B = 0, A_2 + C = -2, 2A_1 = 0, 2A_2 = -6 \rightarrow A_1 = 0, A_2 = -3, B = 0, C = 1.$$

4. Integrálás:

$$\int \frac{x^4 - 6}{x^4 + 2x^2} dx = \int 1 dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2 + 2} dx = x + \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$