Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem

Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar

Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

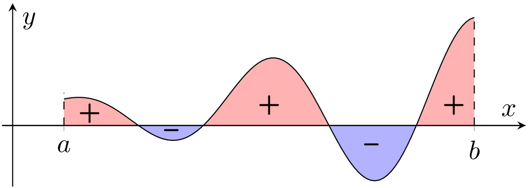
belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

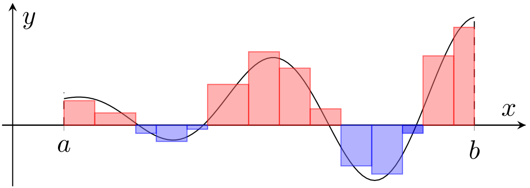
18. előDás:
Riemann integrál tulajdonságai,
Határozott integrál,
Newton-Leibniz tétel

Riemann-integrál

Adott egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **korlátos** függvény. A grafikon "alatti" területet szeretnénk kiszámolni: az x-tengely, $x = a$, $x = b$ függőleges egyenesek és a grafikon által határolt síkidom **előjeles** területét.



Ötlet: közelítsük téglalapok területösszegével a teljes síkidom területét.



Riemann-integrál

Ehhez **felosztjuk** az $[a, b]$ intervallumot $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pontokkal, hogy:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

és minden **részintervallumon** választunk egy közbülső pontot:

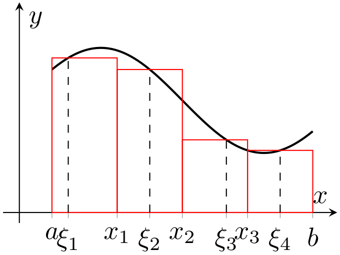
$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A területet **közelítő összeg,** ahol minden részintervallum hossza $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$:

$$T_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i.$$

Ha finomítjuk a felosztást, azaz további osztópontokat veszünk hozzá $\mathcal{P}$-hez, úgy hogy $\max\{\Delta_i\} \to 0$, akkor a közelítőösszegek határértékét

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\text{-vel jelöljük.}$$



Ez a határérték megegyezik a függvény alatti területtel, ha f folytonos.

Riemann-integrál

Definíció: Ha f az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon adott korlátos függvény, és az $[a, b]$ intervallumon adott bármely $\mathcal{P}$ felosztást fimomítva – úgy hogy a részintervallumok hossza a 0-hoz tart – a közelítőösszegek határértéke létezik, és minden felosztásra és finomításra azonos, akkor azt mondjuk, hogy f **Riemann-szerint integrálható** $[a, b]$-n. Ilyenkor a határértéket a függvény $[a, b]$ **intervallumon vett határozott integrálján**ak nevezzük.

Jelölés:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Tétel: Ha f az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon folytonos, akkor Riemann-szerint integrálható függvény. (Az integrál értéke a függvény "alatti" síkidom területével egyezik meg.)

Tétel: Ha f az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon Riemann-szerint integrálható függvény, akkor bármely $[c, d] \subseteq [a, b]$ intervallumon is létezik a határozott integrálja.

Riemann-integrál tulajdonságai

Ha f az $[a,b] \subset D_f$ intervallumon Riemann-szerint integrálható függvény, akkor

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)dx$,
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^b f(x)dx$, ahol $\xi \in [a,b]$ **additív**
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)dx$,
- $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,

  } **lineáris**
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)dx$, ahol $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ **monoton**

Newton–Leibniz-tétel

Tétel [Newton–Leibniz]: Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon és f-nek létezik itt F primitív függvénye, mely folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor

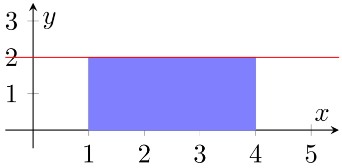
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b \text{– jelölés.}$$

Példák:

1) $f(x) = 2$ és $[a, b] = [1, 4]$.

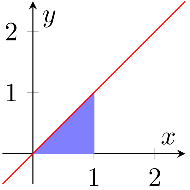
Ekkor $F(x) = 2x$, és így:

$$\int_1^4 2\,\mathrm{d}x = [2x]_1^4 = 8 - 2 = 6$$



2) $f(x) = x$ és $[a, b] = [0, 1]$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



Példák

3) $f(x) = x^2$, ha $[a, b] = [-1, 1]$

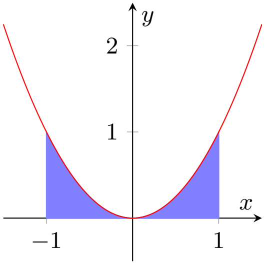
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x =$$

Példák

3) $f(x) = x^2$, ha $[a, b] = [-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$= 2 \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$, mert f páros.

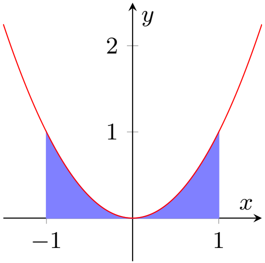


Példák

3) $f(x) = x^2$, ha $[a, b] = [-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$= 2 \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$, mert f páros.



4) $f(x) = \sin(x)$, ha $[a, b] = [0, \pi]$

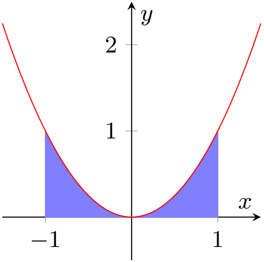
$$\int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x =$$

Példák

3) $f(x) = x^2$, ha $[a, b] = [-1, 1]$

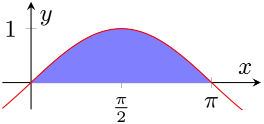
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$= 2\int_{0}^{1} x^2 \, dx, \text{ mert } f \text{ páros.}$$



4) $f(x) = \sin(x)$, ha $[a, b] = [0, \pi]$

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x) \, dx = \big[-\cos(x)\big]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

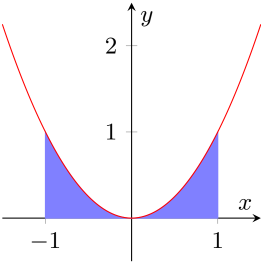


Példák

3) $f(x) = x^2$, ha $[a,b] = [-1,1]$

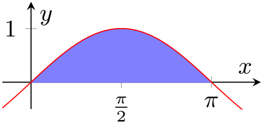
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$= 2\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x, \text{ mert } f \text{ páros.}$$



4) $f(x) = \sin(x)$, ha $[a,b] = [0,\pi]$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \big[-\cos(x)\big]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$



5) $f(x) = \sin(x)$, ha $[a,b] = [-\pi,\pi]$

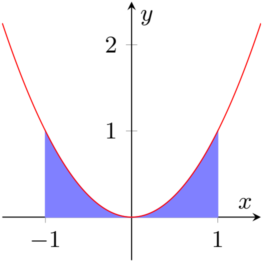
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x \overset{*}{=}$$

Példák

3) $f(x) = x^2$, ha $[a, b] = [-1, 1]$

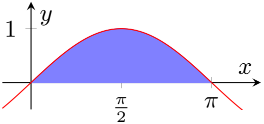
$$\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$= 2\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$, mert f páros.



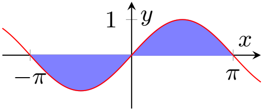
4) $f(x) = \sin(x)$, ha $[a, b] = [0, \pi]$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \big[-\cos(x)\big]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$



5) $f(x) = \sin(x)$, ha $[a, b] = [-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x \stackrel{*}{=} \big[-\cos(x)\big]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0$$

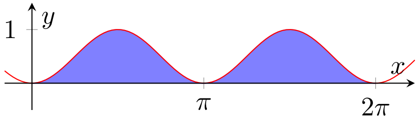


$\stackrel{*}{=} \int_{-\pi}^{0} \sin(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} \sin(x) \, \mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} \sin(x) \, \mathrm{d}x$, mert f páratlan.

Példa

$$f(x) = \sin^2(x), \text{ ha } \ [a, b] = [0, 2\pi]$$

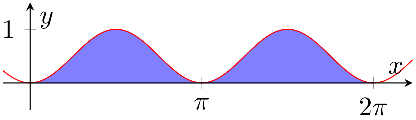
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$



Példa

$f(x) = \sin^2(x)$, ha $[a,b] = [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$



A $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ azonosság felhasználásával:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - 0 = \pi$$

Integrálfüggvény

Definíció: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor az

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{függvény az } \textbf{integrálfüggvénye}.$$

Példa:

$f(x) = 2x$ és $a = 0$ esetén az integrálfüggvény:

$$F(x) = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^x = x^2.$$

$f(x) = 2x$ és $a = 3$ esetén az integrálfüggvény:

$$F(x) = \int_3^x 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_3^x = x^2 - 9 = x^2 + c.$$

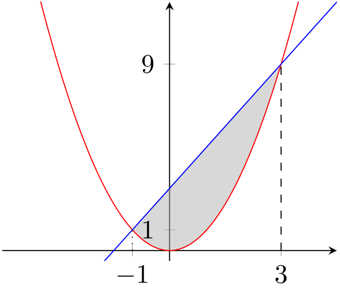
Tétel: Ha az $f(x)$ folytonos az $[a, b]$-n, akkor létezik $F(x)$ integrálfüggvénye és differenciálható is, így $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye lesz.

Ezért mondhatjuk, hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, de nem mindig tudjuk elemi függvényekkel kifejezni (pl.: e^{-x^2}).

Határozott integrál alkalmazása – Területszámitás bevezető

Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola és az $y = 2x + 3$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom terültetét!

Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola és az $y = 2x + 3$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom terültetét!



Először számoljuk ki a metszéspontokat!

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

Így a következő integrált kell kiszámítanunk:

$$\int_{-1}^{3} 2x + 3 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = (9{+}9{-}9) - \left(1 - 3 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

Határozott integrál alkalmazása – Területszámitás

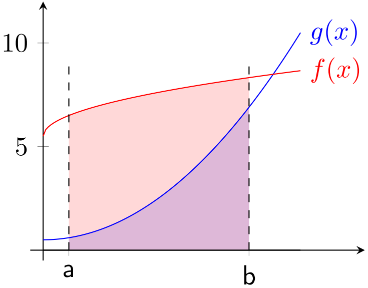
Határozzuk meg az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ görbék által határolt (korlátos) síkidom terültetét az $x \in [a, b]$ intervallum felett!

A két görbe közti terület kiszámítható

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T_f$$

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = T_g$$

területek különbségeként $T = T_f - T_g$.



Így a következő integrált kell kiszámítanunk:

$$T = T_f - T_g = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

Határozott integrál alkalmazása – Területszámitás példa

Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola és az $y = -x + \frac{5}{2}$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom terültetét!

Határozott integrál alkalmazása – Területszámitás példa

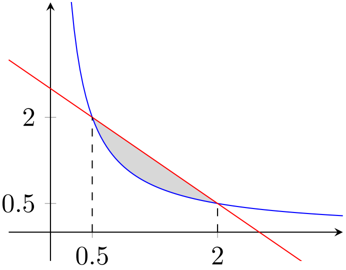
Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola és az $y = -x + \frac{5}{2}$ egyenes által határolt (korlátos) síkidom terültetét!

Először számoljuk ki a metszéspontokat!

$$\frac{1}{x} = -x + \frac{5}{2}$$

$$2 = -2x^2 + 5x$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-4} = \frac{-5 \pm 3}{-4} = \begin{matrix} 2 \\ 1/2 \end{matrix}$$



Így a következő integrált kell kiszámítanunk:

$$\int_{1/2}^{2} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} - \ln|x|\right]_{1/2}^{2} =$$

$$= (-2 + 5 - \ln(2)) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \ln(1/2)\right) = \frac{15}{8} - 2\ln(2)$$