

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

20. előadás:
Határozott integrálok kiszámítása
integrálási technikákkal

Határozott integrál kiszámítása parciális integrálással

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Példa:

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \int_1^e \frac{x}{2} dx =$$

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Feladat

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cos(2x) dx = \left[x \frac{\sin(2x)}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2} dx =$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \cos(2x) & g(x) &= \frac{\sin(2x)}{2} \end{aligned}$$

$$= 0 - \frac{\pi}{8} - \left[-\frac{\cos(2x)}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{8} - \left(-\frac{1}{4} - 0 \right) = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Határozott integrál kiszámítása helyettesítéses integrálással

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t)) x'(t) dt,$$

ahol $x = x(t)$ monoton függvény és $x(t_a) = a$, $x(t_b) = b$.

Példa:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

Ha $t = e^x \Rightarrow x(t) = \ln t$, melynek deriváltja: $x'(t) = \frac{1}{t}$.

Határok: ha $x = 0$, akkor $t_0 = e^0 = 1$, ha $x = 1$, akkor $t_1 = e^1 = e$.

$$= \int_1^e \frac{t}{t^2 + 1} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1} dt = \left[\operatorname{arctg}(t) \right]_1^e = \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}.$$

Feladat

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \, dx =$$

Ha $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$, ha $t > 0$, és $\frac{dx}{dt} = 2t$.

Határok: $x = \pi^2 \rightsquigarrow t = \pi$ $x = 0 \rightsquigarrow t = 0$

$$= \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot 2t \, dt = 2 \int_0^{\pi} t \sin(t) \, dt =$$

$$f(t) = t, \quad g'(t) = \sin(t) \quad \longrightarrow \quad f'(t) = 1, \quad g(t) = -\cos(t)$$

$$= 2 \left(\left[-t \cos(t) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(t) \, dt \right) = 2 \left(-\pi \cdot (-1) + \left[\sin(t) \right]_0^{\pi} \right) = 2\pi.$$

Határozott integrál kiszámítása parciális törtekre bontással

$$\int_2^3 \frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)} dx = \int_2^3 (x+1) + \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^3 +$$
$$+ \int_2^3 \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} dx =$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$A + C = 1, \quad B - A = 0, \quad -B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1, \quad B = -1, \quad C = 2.$$

$$= \left(\frac{15}{2} - 4 \right) + \int_2^3 \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)} dx = \frac{7}{2} + \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| \right]_2^3 =$$

$$\frac{7}{2} - \ln(3) + \ln(2) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\ln(2) - 2\ln(1) = \frac{10}{3} - \ln(3) + 3\ln(2).$$