Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

Kiegészítő anyag:
Implicit és paraméteres görbék deriváltja

Implicit módon megadott görbék

A koordináta rendszer görbéi megadhatóak olyan (x, y) pontok halmazaként, melyekre teljesül egy megadott $F(x, y) = 0$ egyenlet. Az így definiált göbéket **implicit módon megadott görbéknek** nevezzük. (A függvényként definiált grafikongörbék $y = f(x)$ hozzárendelési szabályát **explicit megadásnak** nevezzük.)

$$\mathcal{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x, y) = 0\right\}.$$

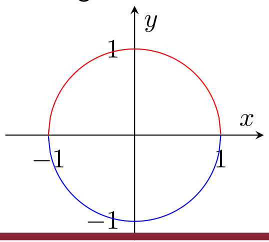
Például az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő x és y koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, 1 sugrú kör:

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}.$$

Ez a görbe, mint függvény csak két darabban adható meg

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$



Implicit görbe érintője

Az implicit módon adott görbe érintőjét egy adott $P(x_0, y_0)$ pontban a meredeksége: $\dfrac{dy}{dx}$ kiszámításával tudjuk megadni. Ekkor a görbe teljes $F(x,y) = 0$ egyenletét deriváljuk.

$$F(x,y) = 0 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

itt $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ olyan, hogy az y változót, mint konstanst tekintjük, hasonlóan $\dfrac{\partial F}{\partial y}$-nál x-et. Ekkor

$$\frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

adódik az érintő meredekségére, ha $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Így az érintőegyenes egyenlete P-ben $\qquad y = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0.$

Implicit görbe érintője

HA $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, akkor az érintőegyenest a következő alakban adhatjuk meg

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Azaz

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0),$$

$$x = x_0$$

függőleges érintő adódik.

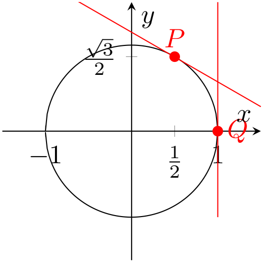
Példa

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő x és y koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, 1 sugrú kör, írjuk fel az érintőjét a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban.

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\bigg|_P = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Az érintő egyenese $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $Q(1,0)$ pontban az érintő függőleges, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0$ eltűnik, így az érintő

$$0 \cdot (y - 0) = -2(x - 1)$$
$$x = 1.$$

Paraméteresen adott síkgörbék

A paraméteresen megadott síkgörbék olyan ponthalmazok, melyek koordinátapárjai két függvény, $x(t)$ és $y(t)$ segítségével vannak megadva. Ezek egy $t \in [a, b]$ paraméterintervallum felett vannak definiálva.

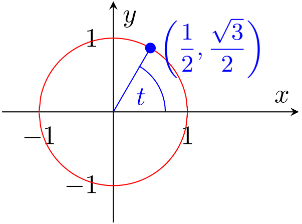
$$\mathcal{G} = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [a, b] \right\}.$$

Például az $x(t) = \cos(t)$ és $y(t) = \sin(t)$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, 1 sugrú kör, ha $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{K} = \left\{ (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Minden t paraméterértékhez pontosan egy görbepont tartozik.

Például: $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$, akkor $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Paraméteresen adott görbe érintője

Számítsuk ki az $(x(t), y(t))$ görbe t_0 paraméterértékhez tartozó pontjába húzott érintő meredekségét.

$$\left.\frac{dy(t)}{dx(t)}\right|_{t_0} = \frac{dy}{dt} \cdot \left.\frac{dt}{dx}\right|_{t_0} = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)}, \quad \text{ahol } \dot{x}(t_0) \neq 0.$$

A kör $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontjában

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Így az érintő egyenlete

$$y = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Paraméteresen adott görbe érintője

Az $x(t) = \cos^3(t)$ és $y(t) = \sin^3(t)$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú asztrois, melynek az x- és y-tegelyekkel egybeesnek a szimmetriatengelyei, $t \in [0, 2\pi]$.

Az asztrois $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ pontjában

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Így az érintő egyenlete itt

$$y = -1\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$