Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

Kiegészítő anyag:
Numerikus integrálás

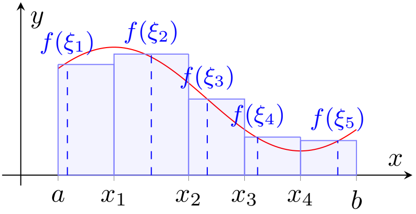
Integrálközelítő módszerek

Adott egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, melynek nem ismerjük a primitív függvényét. A határozott integrál definíciójában használt közelítőösszegek segítségével becsülhetjük az integrál értékét.

Téglalap-módszer. Felosztjuk az integrálási intervallumot

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok között $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$-ben vett függvényértéket $f(\xi_i)$-t vesszük magasságként.



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i = S_n.$$

Téglalap-módszer

A közelítő módszerekben általában feltesszük, hogy a felosztás egyenletes (ekvidisztáns), azaz

$$\Delta_i = \frac{b-a}{n}, \qquad \text{és} \qquad x_i = a + (i-1)\,\frac{b-a}{n},\ i = 1, \ldots n.$$

A ξ_i helyek választása szerinti különböző módszerek:

- ha $\xi_i = x_{i-1}$, bal végpontos módszer

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}),$$

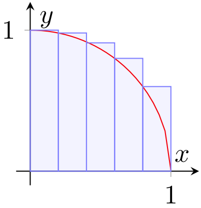
- ha $\xi_i = x_i$, jobb végpontos módszer,
- ha $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$, középpontos módszer.

Példa

Számítsuk ki az 1 sugarú negyedkör alatti területet $(\pi/4 \approx 0,7854)$közelítve.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0,1].$$

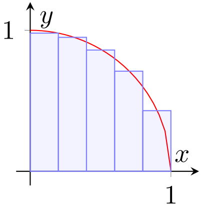
Bal végpontos módszerrel, $n = 5$-re



$$\frac{1}{5}\left(f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)\right) =$$

$$= \frac{1}{5}(1+0,979+0,916+0,8+0,6) = 0,859$$

Középpontos módszerrel, $n = 5$-re



$$\frac{1}{5}\left(f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)\right) =$$

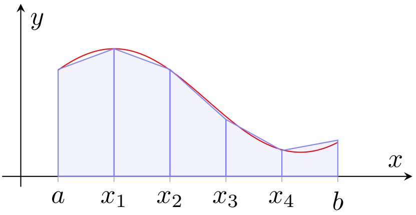
$$= \frac{1}{5}(0,995+0,954+0,866+0,714+0,436) = 0,793$$

Trapéz-módszer

Felosztjuk az integrálási intervallumot n egyenlő darabra (ekvidisztáns), azaz

$$\Delta_i = \frac{b-a}{n}, \text{ és } \quad x_i = a + (i-1)\,\frac{b-a}{n},\ i = 1, \ldots n.$$

Az $(x_i, 0), (x_{i-1}, 0), (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és $(x_i, f(x_i))$ pontok által kifeszített derékszögű trapézok területével közelítjük a függvény alatti területet.



$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right).$$

Példa

Számítsuk ki az 1 sugarú negyedkör alatti területet $(\pi/4 \approx 0,7854)$közelítve.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0,1].$$

Ha $n = 5$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{f(0)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + \frac{f(1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + 0,979 + 0,916 + 0,8 + 0,6 + \frac{0}{2}\right) = 0,759$$