

2. Gyakorlat - Megoldások

Függvénytranszformációk.

Függvények elemi tulajdonságai.

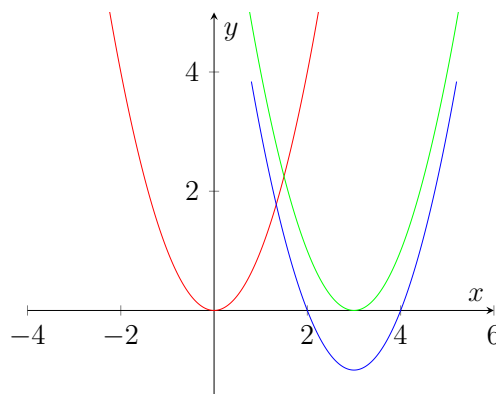
Függvénykompozíció. Inverzfüggvény.

F1. (Függvénytranszformációk). Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal a következő függvényeket:

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 8,$

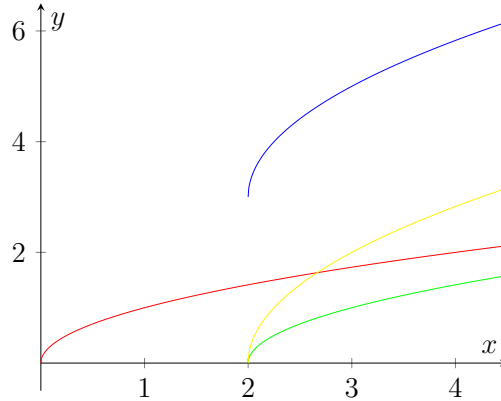
(b) $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3.$

Megoldás [F1]. (a) Alakítsuk a kifejezést teljes négyzetté: $f(x) = (x-3)^2 - 1$. Az x^2 grafikonját 3 egységgel jobbra tolva kapjuk a $(x-3)^2$ függvény grafikonját. Végül 1-gyel való lefele tolással kapjuk a $(x-3)^2 - 1$ grafikonját.



Ez egy parabola, melynek szimmetriatengelye az $x = 6/(2 \cdot 1) = 3$ azaz az $x = 3$ egyenes. Csúcsponja az $x = 3$ behelyettesítésével adódik $(3, -1)$. A görbe x -tengellyel vett metszéspontjai az $y = 0$ és $x = 2$ és 4 koordinátájú pontok ($x^2 - 6x + 8 = 0$ megoldásai).

(b) Hasonlóan az előzőhöz: A $\sqrt{x}$ grafikonját 2 egységgel jobbra tolva kapjuk a $\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját. Ennek a $2\sqrt{x-2}$ a kétszerese, tehát ezt meg kell egy kicsit nyújtanunk az y -tengely irányába, és végül 3-mal való feltolással kapjuk a $2\sqrt{x-2} + 3$ grafikonját.



F2. (Függvények értelmezési tartománya). Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

Megoldás [F2]. Négyzetgyököt csak nemnegatív számból tudunk vonni, így szükséges, hogy $2x-1 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{1}{2}$. Nullával nem tudunk osztani, így $3x+2 \neq 0$, azaz $x \neq -\frac{2}{3}$. A logaritmus függvény csak pozitív számokon értelmezett, így szükséges, hogy $|2x-1| > 0$, ami azt jelenti, hogy $2x-1 \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{2}$. Mind a három kikötés szükséges, ami azt jelenti, hogy $x > \frac{1}{2}$ azaz $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

F3. (Függvénykompozíció I). Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$(a) \quad f(x) = 1 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(u) = \sqrt{u} \quad (u \geq 0),$$

$$(b) \quad f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(u) = 2^u \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Megoldás [F3]. (a)

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(\sqrt{u}) = 1 - (\sqrt{u})^2 = 1 - u, \quad u \geq 0$$

Ez a kompozíció csak nemnegatív u -kra értelmes, habár a kapott kifejezés értelmezhető tetszőleges u -ra is.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

feltéve, hogy a g függvény értelmezési tartománya miatt $1 - x^2 \geq 0$, azaz $|x| \leq 1$.

(b) Ebben az esetben nincs gond az értelmezési tartománnyal:

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(2^u) = (2^u)^2 = 2^{2u},$$

használva a hatványozás azonosságait.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{(x^2)}.$$

F4. (Függvénykompozíció II). Mely két függvény kompozíciója az alábbi függvények?

$$(a) \quad e^{x^2}, \quad (b) \quad \sin^2(x), \quad (c) \quad \ln(\ln(x)).$$

Megoldás [F4]. (a) Ha kiszámoljuk a függvény értékét, akkor először a négyzetre emelést kell kiszámolnunk, így ez a belső függvény $g(u) = u^2$. Másodszorra az e -re emeljük ezt, tehát az exponenciális függvény a külső függvény, $f(x) = e^x$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

(b) Először a sinus függvényt kell kiszámolnunk $g(u) = \sin(u)$, és ennek eredményét emeljük négyzetre $f(x) = x^2$. Azaz $(f \circ g)(u) = \sin^2(u)$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

(c) Először az $\ln$ függvényt kell kiszámolnunk $f(u) = \ln(u)$, és ennek eredményét ismét az $f(x) = \ln(x)$ függvénybe írjuk. Azaz $(f \circ f)(u) = \ln(\ln(u))$. $D_{f \circ f} = (1, \infty)$, hiszen $\ln(u) > 0$ kell legyen, azaz $u > 1$.

F5. (Invertálhatóság vizsgálata). Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény nem invertálható.

$$f(x) = |x^2 - 7x + 12|.$$

Megoldás [F5]. A függvény nem injektív, azaz van olyan érték, amit többször vesz fel, például

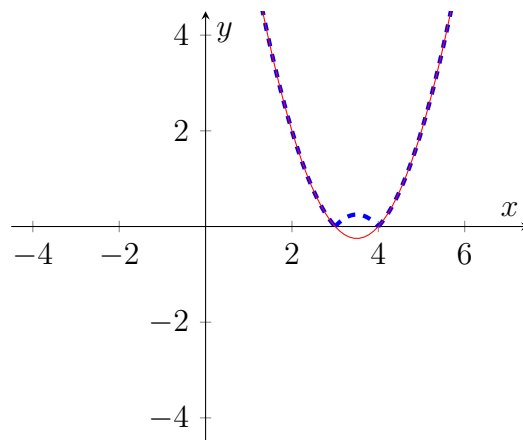
$$|x^2 - 7x + 12| = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = 3; 4$$

A $g(x) = x^2 - 7x + 12$ függvény egy felfelé nyitott parabola, melynek tengelye az $x = 7/2$, csúcspontja a $(3.5, -0.25)$. Ha mindent pontban $f(x) = |g(x)|$, akkor a parabola x -tengely alatti

pontjait feltükröztvén kapjuk az f grafikonját.



F6. (Inverz számítása) Invertálhatóak-e az alábbi függvények? Ha igen, állítsuk elő az inverz függvényt!

$$(a) \quad f(x) = \frac{x-2}{2x+3} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\},$$

$$(b) \quad (\mathbf{Hf}) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt{7-x} + 2 \quad x \in (-\infty, 7].$$

Megoldás [F6]. (a) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben:

$$\frac{x_1-2}{2x_1+3} = \frac{x_2-2}{2x_2+3}$$

$$(x_1-2)(2x_2+3) = (x_2-2)(2x_1+3)$$

$$2x_1x_2 - 4x_2 + 3x_1 - 6 = 2x_1x_2 - 4x_1 + 3x_2 - 6$$

$$7x_1 = 7x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x .

$$\frac{x-2}{2x+3} = y$$

$$x-2 = y(2x+3)$$

$$x-2 = 2xy+3y$$

$$x-2xy = 3y+2$$

$$x(1-2y) = 3y+2$$

$$x = \frac{3y+2}{1-2y}, \quad \text{ha } y \neq \frac{1}{2}.$$

Azonban $y \neq \frac{1}{2}$ teljesül, hiszen ha

$$\frac{x-2}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

$$2x-4 = 2x+3$$

$$-4 \neq 3.$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{1-2x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

(b) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben:

$$\frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2}$$

$$(x_1+1)(x_2-2) = (x_2+1)(x_1-2)$$

$$x_1x_2+x_2-2x_1-2 = x_1x_2+x_1-2x_2-2$$

$$3x_2 = 3x_1$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x .

$$\frac{x+1}{x-2} = y$$

$$x+1 = y(x-2)$$

$$x+1 = xy - 2y$$

$$x - xy = -1 - 2y$$

$$x(1-y) = -1 - 2y$$

$$x = \frac{2y+1}{y-1}, \quad \text{ha } y \neq 1.$$

Azonban $y \neq 1$ teljesül, hiszen ha

$$\frac{x+1}{x-2} = 1$$

$$x+1 = x-2$$

$$1 \neq -2.$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$.

$$\sqrt{7-x_1} + 2 = \sqrt{7-x_2} + 2$$

$$\sqrt{7-x_1} = \sqrt{7-x_2} \quad \text{mivel itt a gyökfüggvény monoton csökkenő}$$

$$7-x_1 = 7-x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan

fejezhető ki x .

$$\sqrt{7-x} + 2 = y$$

$$\sqrt{7-x} = y - 2$$

$$7 - x = (y - 2)^2 \quad \text{amellett a feltételek mellett, hogy } y \geq 2$$

$$x = 7 - (y - 2)^2.$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = 7 - (x - 2)^2 = -x^2 + 4x + 3$, $x \in [2, \infty)$ feltétel mellett.

Opcionális(ha marad idő)

F7. Állapítsuk meg, hogy az adott függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy egyik tulajdonságot sem teljesítik!

$$(a) \quad f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1},$$

$$(b) \quad f(x) = x^{-5} \cdot \sin(x) + 3.$$

Megoldás [F7].

$$(a) \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \text{ páratlan, mert}$$

$$f(-x) = \frac{-5x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{5x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

$$(b) \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ páros(= páratlan} \cdot \text{ páratlan+páros), mert}$$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^5} \cdot \sin(-x) + 3 = -x^{-5} \cdot -\sin(x) + 3 = f(x).$$