

3. Gyakorlat - Megoldások

Polinomok

F1. (Szorzatalak keresése). Alakítsuk szorzattá a következő másodfokú kifejezéseket!

(a) $x^2 + 7x + 10$,

(b) $-2x^2 + 7x - 3$.

Megoldás [F1]. (a) Felhasználva, hogy $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$, ezért a kifejezés gyökeire teljesül, hogy

$$x_1 \cdot x_2 = 10,$$

$$x_1 + x_2 = -7.$$

Könnyen látszik, hogy a -2 és -5 egész számokra ez teljesül. Így a polinom gyöktényezőss alakja

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5).$$

Vagy keressük meg a másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} \quad \text{tehát } x_1 = -2 \text{ és } x_2 = -5.$$

(b) A megoldóképlet segítségével a gyökök

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-2)(-3)}}{-4} = \frac{-7 \pm 1}{-4} \quad \text{tehát } x_1 = \frac{1}{2} \text{ és } x_2 = 3.$$

Így a polinom gyöktényezőss alakja

$$-2x^2 + 7x - 3 = (-2) \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 3).$$

F2. (Polinomosztás.) Végezzük el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, és ellenőrizzük az osztás helyességét, ha

$$(a) \quad p(x) = 2x^4 - x^2 - 5x + 6 \quad \text{és} \quad q(x) = x^2 - 3x,$$

$$(b) \quad p(x) = x^5 - x^3 - 2x + 2 \quad \text{és} \quad q(x) = x^2 - x + 3$$

$$(c) \quad \textbf{(Hf)} \quad p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \text{és} \quad q(x) = x^3 + 2x.$$

Megoldás [F2].

(a)

$$\begin{array}{r}
 (2x^4 \quad \quad \quad - \quad x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6) : (x^2 - 3x) = 2x^2 + 6x + 17 \\
 \underline{2x^4 \quad - \quad 6x^3} \\
 \quad \quad 6x^3 \quad - \quad x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6 \\
 \quad \quad \underline{6x^3 \quad - \quad 18x^2} \\
 \quad \quad \quad \quad 17x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 6 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{17x^2 \quad - \quad 51x} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 46x \quad + \quad 6
 \end{array}$$

Tehát

$$2x^4 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) + 46x + 6.$$

(b)

$$\begin{array}{r}
 (x^5 \quad \quad \quad - \quad x^3 \quad \quad \quad - \quad 2x \quad + \quad 2) : (x^2 - x + 3) = x^3 + x^2 - 3x - 6 \\
 \underline{x^5 \quad - \quad x^4 \quad + \quad 3x^3} \\
 \quad \quad x^4 \quad - \quad 4x^3 \quad \quad \quad - \quad 2x \quad + \quad 2 \\
 \quad \quad \underline{x^4 \quad - \quad x^3 \quad + \quad 3x^2} \\
 \quad \quad \quad \quad - \quad 3x^3 \quad - \quad 3x^2 \quad - \quad 2x \quad + \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{- \quad 3x^3 \quad + \quad 3x^2 \quad - \quad 9x} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \quad 6x^2 \quad + \quad 7x \quad + \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{- \quad 6x^2 \quad + \quad 6x \quad - \quad 18} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \quad + \quad 20
 \end{array}$$

Tehát

$$x^5 - x^3 - 2x + 2 = (x^3 + x^2 - 3x - 6)(x^2 - x + 3) + (x + 20).$$

(c)(Hf)

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x - 3)(x^3 + 2x) + (-x^2 + 8x + 1).$$

F3. (Gyöktényezős alakra hozás). Keressük meg a polinom egész gyökeit, és írjuk fel elsőfokú tényezők szorzataként!

$$p(x) = x^3 - x^2 - 25x + 25$$

Megoldás [F3]. Az egész gyökök osztják a konstas tagot (25), azaz $\pm 1, \pm 5$ és ± 25 jöhet szóba. $x_1 = 1$ gyök lesz és az $x_{2,3} = \pm 5$ is, mert $1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$, $5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ és $(-5)^3 - (-5)^2 - 25(-5) + 25 = -125 - 25 + 125 + 25 = 0$ is teljesül. Így a polinom gyöktényezős alakja

$$(x - 1)(x - 5)(x + 5).$$

F4. (Polinom valós gyökeinek keresése). Határozzuk meg az alábbi polinomok valamennyi valós gyökét, és írjuk fel gyöktényezős alakban!

(a) $x^3 - 7x^2 + 2x - 14,$

(b) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3,$

(c) (Hf) $x^4 - 6x^2 + x + 6,$

(d) (Hf) $2x^3 - 8x^2 + 9x - 2.$

Megoldás [F4]. (a) Először próbáljuk egész gyököket keresni, ezek -14 osztói lehetnek.

$(7)^3 - 7(7)^2 + 2(7) - 14 = 0,$ tehát az $x_1 = 7$ gyök.

Mivel $(x - 7)$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 7x^2 + 2x - 14) : (x - 7) = x^2 + 2 \\
 \hline
 x^3 - 7x^2 \\
 \hline
 + 2x - 14 \\
 + 2x - 14 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$x^2 + 2$ negatív diszkriminánsú másodfokú polinom $D = \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot 2} < 0$, így nincs további valós gyöke. A szorzatalak

$$(x - 7)(x^2 + 2).$$

(b) Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek -3 osztói lehetnek.

$$(1)^4 - 6(1)^3 + 10(1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 6 + 10 - 2 - 3 = 0, \quad \text{tehát az } x_1 = 1 \text{ gyök.}$$

$$\text{továbbá } (3)^4 - 6(3)^3 + 10(3)^2 - 2(3) - 3 = 81 - 162 + 90 - 6 - 3 = 0, \quad \text{tehát az } x_2 = 3 \text{ is gyök.}$$

Mivel $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3) : (x^2 - 4x + 3) = x^2 - 2x - 1 \\
 \hline
 x^4 - 4x^3 + 3x^2 \\
 \hline
 - 2x^3 + 7x^2 - 2x - 3 \\
 - 2x^3 + 8x^2 - 6x \\
 \hline
 - x^2 + 4x - 3 \\
 - x^2 + 4x - 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Keressük meg a $x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

A gyöktényezős alak

$$(x - 1)(x - 3)(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}).$$

$$(c) \quad \text{gyökök: } -1, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ gyöktényezős alak: } (x+1)(x-2) \left(x + \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \right) \left(x + \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} \right) \right)$$

(d) gyökök: $2, 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, gyöktényezős alak: $2 \cdot (x - 2) \left(x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \left(x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

Optionális(ha marad idő) F5. (Paraméteres gyökkeresés). A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Írjuk fel gyöktényezős alakban a polinomot!

Megoldás [F5]. A polinomba $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1. A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges egész gyökei ± 1 , behelyettesítve azt kapjuk, hogy $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ is gyök. Ekkor emeljük ki az $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ polinomot.

$$\begin{array}{r}
 (4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1) : (x^2 - 1) = 4x^2 + 4x + 1 \\
 \underline{4x^4 \qquad \qquad - 4x^2} \\
 4x^3 + x^2 - 4x - 1 \\
 \underline{4x^3 \qquad \qquad - 4x} \\
 x^2 \qquad \qquad - 1 \\
 x^2 \qquad \qquad - 1 \\
 \underline{\hspace{10em}} \\
 0
 \end{array}$$

$4x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinom gyökei a megoldóképlet alapján $x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{8} = -\frac{1}{2}$, azaz kétszeres gyököt találtunk, azaz $4x^2 + 4x + 1 = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$. Így

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 4 \cdot (x - 1)(x + 1) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$