

4. Gyakorlat - Megoldások

Numerikus sorozatok

F1. (Korlátosság, monotonitás és konvergencia). Vizsgáljuk a sorozatok korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$\begin{array}{ll} (a) & a_n = 3n + \frac{1}{n}, \\ (b) & b_n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \\ (c) & c_n = \frac{2^{n+2} - 1}{5^n}, \\ (d)(\mathbf{Hf}) & d_n = \frac{1}{1 - 4^n}. \end{array}$$

Megoldás [F1]. (a)

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{>}{<} a_{n+1} \\ 3n + \frac{1}{n} &\stackrel{>}{<} 3(n+1) + \frac{1}{n+1} \\ \frac{3n^2 + 1}{n} &\stackrel{>}{<} \frac{3(n+1)^2 + 1}{n+1} \\ (3n^2 + 1)(n+1) &\stackrel{>}{<} (3(n+1)^2 + 1)n \\ 3n^3 + 3n^2 + n + 1 &\stackrel{>}{<} 3n^3 + 6n^2 + 4n \\ 0 &< 3n^2 + 3n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növekvő.} \end{aligned}$$

Felülről nem korlátos, mert $3n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n + \frac{1}{n} = \infty$, a sorozat végtelenbe tartó (divergens). Alsó korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = 3 + \frac{1}{1} = 4$.

(b) A határérték $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + 0}} = 3$, vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{>}{<} b_{n+1} \\ \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 1}} &\stackrel{>}{<} \frac{3(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} \\ \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 1}} &\stackrel{>}{<} \frac{3n+3}{\sqrt{n^2 + 2n + 2}} \\ 3n\sqrt{n^2 + 2n + 2} &\stackrel{>}{<} (3n+3)\sqrt{n^2 + 1} \\ 9n^2(n^2 + 2n + 2) &\stackrel{>}{<} (9n^2 + 18n + 9)(n^2 + 1) \\ 9n^4 + 18n^3 + 18n^2 &\stackrel{>}{<} 9n^4 + 18n^3 + 18n^2 + 18n + 9 \\ 0 &< 18n + 9, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növekvő.} \end{aligned}$$

Felülről korlátos, legkisebb felső korlátja a határérték, a 3. Legnagyobb alsó korlátja a monotonitás

miatt az első eleme $b_1 = \frac{3}{\sqrt{1+1}} = 3/\sqrt{2} \approx 2,1213$.

(c) A határérték $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 1}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 - 0 = 0$, vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned} c_n &\stackrel{>}{<} c_{n+1} \\ \frac{2^{n+2} - 1}{5^n} &\stackrel{>}{<} \frac{2^{n+3} - 1}{5^{n+1}} \\ 5(2^{n+2} - 1) &\stackrel{>}{<} 2^{n+3} - 1 \\ 5 \cdot 2^{n+2} - 2^{n+3} &\stackrel{>}{<} 4 \\ 2^{n+2} &> \frac{4}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.} \end{aligned}$$

Felülről korlátos, felső korlátja $a_1 = 7/5$. Legnagyobb alsó korlátja a monotonitás miatt a határérték: 0.

(d) Monoton növekvő, korlátos, legnagyobb alsó korlátja $a_1 = -1/3$, legkisebb felső korlátja a határérték: 0.

F2. (Sorozatok határértéke). Számítsuk ki a határértékeket az ismert határértékek felhasználásával!

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 6n + \frac{1}{n}}{3n^5 - n^2 + 4}, & \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n} - \sqrt{3n} + 2}{\sqrt[4]{2n} + \sqrt{n} - 1}, \\ (c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n - 3} - \sqrt{n + 9}, & \quad (d)(\mathbf{Hf}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n} - \sqrt{n + 3}}{2 - \sqrt{n}}, \\ (e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 3}{n + 1}\right)^{3n}, & \quad (f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+2}, \\ (g)(\mathbf{Hf}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{3n + 2}\right)^{2n}. & \end{aligned}$$

Megoldás [F2]. (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 6n + \frac{1}{n}}{3n^5 - n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{3n^2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^3}} = \frac{5 + 0 + 0}{\infty + 0 + 0} = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n} - \sqrt{3n} + 2}{\sqrt[4]{2n} + \sqrt{n} - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{5}} - \sqrt{3} \cdot n^{\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt[4]{2} \cdot n^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{2}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[10]{n^3}} - \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{n}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \\
&= \frac{\frac{1}{\infty} - \sqrt{3} + \frac{2}{\infty}}{\frac{\sqrt[4]{2}}{\infty} + 1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0 - \sqrt{3} + 0}{0 + 1 - 0} = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}) \cdot \frac{\sqrt{4n-3} + \sqrt{n+9}}{\sqrt{4n-3} + \sqrt{n+9}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3-n-9}{\sqrt{4n-3} + \sqrt{n+9}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-12}{\sqrt{4n-3} + \sqrt{n+9}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n} - \frac{12}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4 - \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{9}{n}}} = \\
&= \frac{3 \cdot \infty - 12 \cdot 0}{\sqrt{4-0} + \sqrt{1+0}} = \frac{\infty - 0}{2+1} = \infty.
\end{aligned}$$

(d) $1 - \sqrt{2}$.

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{4}{n+1} \right)^{n+1} \right)^{\frac{3n}{n+1}} = (e^{-4})^3 = e^{-12} = \frac{1}{e^{12}}.$$

vagy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+1} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(1 - \frac{3}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right)^3 = \left(\frac{e^{-3}}{e} \right)^3 = e^{-12}.$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^2 = (e^2) \cdot 1^2 = e^2.$$

(g) e^{-2} .**F3. (Rendőr-elv).** Számítsuk ki a határértékeket a Rendőr-elv alkalmazásával!

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+3}, \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \quad (c) \textbf{(Hf)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n)}{7n-2}.$$

Megoldás [F3].

$$(a) \quad 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+3} < \lim_{n > 2} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$(b) \quad 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3.$$

$$(c) \quad 0.$$