

5. Gyakorlat - Megoldások

Függvények határértéke, folytonossága

F1. (Határértékszámítás) Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7,$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 10x + 1},$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{2x - 6}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^2}{2x - 6},$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x - x^2}{2x - 6},$$

$$(d)(\mathbf{Hf}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 4x^3 + x}{7 - x^2},$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1},$$

$$(f)(\mathbf{Hf}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right),$$

$$(g)(\mathbf{Hf}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x},$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)},$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Megoldás [F1].

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7 = \text{"}\infty - \infty\text{"} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3} \right) = \infty \cdot (1 + 0 + 0) = \infty.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 10x + 1} = \frac{\text{"}\infty\text{"}}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{-\infty - 0 + 0} = 0.$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{2x - 6} = \frac{0 - 0}{0 - 6} = \frac{0}{-6} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^2}{2x - 6} = \frac{\text{"}\infty - \infty\text{"}}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{2 - \frac{6}{x}} = \frac{1 - \infty}{2 - 0} = -\infty,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x - x^2}{2x - 6} &= \lim_{x=3+h, h>0} \frac{(3+h) - (3+h)^2}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-6 - 5h - h^2}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (-6 - 5h - h^2) \cdot \frac{1}{2h} = (-6) \cdot \infty = \infty = -\infty, \end{aligned}$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x - x^2}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x - x^2}{2(x-3)} = \frac{-6}{2 \cdot 0+} = -\infty.$$

$$(d) \quad -\infty.$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \frac{1 \cdot (1+1)}{1+1} = 1.
\end{aligned}$$

$$(f) \quad \frac{1}{2}.$$

$$(g) \quad e^4.$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{7x} \frac{3x}{\sin(3x)} \frac{7}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

F2. (Féloldali határértékek) Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét az alábbi függvénynek!

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

Megoldás [F2].

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} &= \lim_{x=1+h} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 1}{(1+h)^3 - 1} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + 3h + 1}{h^3 + 3h^2 + 3h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + 3h + 1}{h^2 + 3h + 3} = \infty \cdot \frac{0+0+1}{0+0+3} = \infty.
\end{aligned}$$

$$\text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x^3 > 1} \frac{1}{0+} = \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} &= \lim_{x=1-h} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(1-h)^2 + (1-h) - 1}{(1-h)^3 - 1} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 - 3h + 1}{-h^3 + 3h^2 - 3h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 - 3h + 1}{-h^2 + 3h - 3} = \infty \cdot \frac{0+0+1}{0+0-3} = -\infty.
\end{aligned}$$

$$\text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x^3 < 1} \frac{1}{0-} = -\infty.$$

F3. (Szakadási helyek) Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5; \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

$$(c) \quad (\mathbf{Hf}) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}, \\ 1, & \text{ha } x = -2 \text{ vagy } x = 3. \end{cases}$$

Megoldás [F3].

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \begin{cases} \frac{x-3}{x-5} & x \neq 2, 5 \\ 0 & x = 2 \text{ vagy } x = 5 \end{cases}$$

Ezért 2-ben $\lim_{x \rightarrow 2 \pm} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2 \pm} \frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{1}{3},$

Tehát az $x_0 = 2$ -ben a két féloldali határérték egyenlő, a szakadás megszüntethető.

Az $x_0 = 5$ helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 5+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x=5+h} \frac{(5+h)-3}{h} = 2 \cdot \infty = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x=5-h} \frac{(5-h)-3}{-h} = 2 \cdot -\infty = -\infty.$$

Az $x_0 = 5$ -ben a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás pólus.

(b) Vizsgálva a határértékeket 0-ban

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{e^{1/x}} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{e^{1/x}} = \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{0+} = \infty,$$

$x_0 = 0$ -ban a két féloldali határérték közül az egyik nem létezik, a szakadás másodfajú (de nem pólus).

(c) $x_0 = -2$ -ben a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás pólus.

$x_0 = 3$ -ben a két féloldali határérték egyenlő, pontosan 1, ezért megszüntethető a szakadás.

Mivel a két féloldali határérték megegyezik a függvényértékkel, ezért nincs szakadás a grafikonon.