

7. Gyakorlat - Megoldások

Szélsőértékek, monotonitás

F1. (Monotonitás, szélsőérték) Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R},$$

$$(b) \quad f(x) = x - \ln(1 + x), \quad D_f = (-1, +\infty),$$

$$(c) \quad f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

$$(d) \quad (\text{Hf}) \quad f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Megoldás [F1].

(a) $f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2}{(3x^2 + 1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ így a függvény monoton növekvő $\mathbb{R}$ -en és ott szigorúan monoton növekvő, mivel a derivált csak 0-ban lesz 0. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$, de ott a deriváltfüggvény nem vált előjelet, tehát nincs szélsőértéke.

(b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, a nevező pozitív, mivel $x > -1$, így $f' < 0$, ha $x < 0$, valamint $f' > 0$ ha $x > 0$. $f' = 0$, ha $x = 0$, itt f' negatívból pozitív értékekbe vált, tehát lokális minimuma van a függvénynek. Értéke $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$.

x	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	sz.mon.csökk.	lok.min.(0)	sz.mon.nő.

$$(c) \quad f'(x) = 5x^4 - 20x^2 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x - 3)(x - 1)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	sz.mon.nő.	$-$	sz.mon.nő	lok.max.(2)	sz.mon.csökk.	lok.min.(-26)	sz.mon.nő.

Lokális maximum értéke van az $x = 1$ helyen: $f(1) = 2$, és lokális minimum értéke van az $x = 3$ -ban: $f(3) = -26$.

$$(d) \quad f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x - 1)^2$$

Ha $x < 0$, akkor f szig. mon. csökken, ha $x > 0$, akkor f szig. mon. nő. Lokális maximum értéke van az $x = 1$ helyen: $f(0) = 2$.

F2. (Globális szélsőértékek.) Határozzuk meg az adott intervallumon az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a függvény a szélsőértékeket.

$$(a) \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad x \in [-1, 5],$$

$$(b) \quad f(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(c) \quad (\text{Hf}) \quad f(x) = x^3 - 4x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Megoldás [F2]. (a) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x - 1)(x + 2)$, $f'(x) = 0$, ha $x = 1$ vagy $x = -2$ (de ez nincs a vizsgált tartományban).

x	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 5)$	5
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	(14)	mon.csökk.	lok.min. (-6)	mon.nő	(266)

Globális maximum értéke: $f(5) = 266$, globális minimum értéke $f(1) = -6$ megegyezik a lokális minimummal.

$$(b) \quad f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}, \quad f'(x) = 0, \text{ ha } x = \pm 10.$$

x	$(0, 10)$	10	$(10, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	mon.csökk.	lok.min.(40)	mon.nő

Itt $\lim_{x \rightarrow 0+} 2 + \frac{200}{x} = \infty$, tehát lokális maximum értéke nincsen a függvénynek az adott tartományban. Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{200}{x} = \infty$ szintén, így a globális minimum értéke $f(10) = 40$, megegyezik a lokális minimummal.

$$(c) \quad \text{Globális minimuma van az } x = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{-ban, a minimum értéke: } -\frac{16}{3\sqrt{3}}.$$

F3. (Szöveges szélsőérték feladat) Adri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra darabonként x petákot költ, akkor darabját $6\sqrt{x}$ petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?

Megoldás [F3]. Adri haszna egy süteményen: $h(x) = 6\sqrt{x} - x$, ha $x > 0$. Ekkor $h'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. A $h'(x) = 0$, ha $\sqrt{x} = 3$, azaz $x = 9$, ekkor a haszonfüggvény:

x	$(0, 9)$	9	$(9, \infty)$
$h'(x)$	+	0	+
$h(x)$	sz.mon.nő.	lok.max.(9)	sz.mon.csökk.

Így 9 petákot kell költenie darabonként az előállításra.

F4. (Szöveges szélsőérték feladat) Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $x\%$ -át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $\frac{x}{50}$ -ed részét elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

Megoldás [F4]. A befolyt adó értéke az adókulcs függvényében

$$a(x) = 10^{13} \cdot \frac{x}{100} - 10^{13} \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{x}{50} = 10^{11} \left(x - \frac{x^2}{50} \right), \quad 0 \leq x \leq 100, \text{ tehát}$$

$$a'(x) = 10^{11} \left(1 - \frac{2x}{50} \right) = 10^{11} \left(\frac{50 - 2x}{50} \right), \text{ ahol } a'(x) = 0 \text{ ha } x = 25.$$

x	0	(0, 25)	25	(25, 100)	100
$a'(x)$	+	+	0	-	-
$a(x)$	mon.nő(0)	mon.nő	lok.max.(12,5 · 10 ¹¹)	mon.csökk.	mon.csökk.(-10 ¹³)

Így a függvény globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 25$. 25%-os adókulcs bevezetése a legjobb.

F5. (Hf) Egy futópályát építenek egy téglalap alakú focipálya körül úgy, hogy a focipálya két hosszabb oldala mentén egyenes, rövidebb oldala mentén félkörpályát alakítanak ki. A futópálya teljes hossza 400 méter lesz. Mekkora legyen a focipálya oldalainak hossza, hogy a területe maximális legyen?

Megoldás [F5]. A pálya kerülete $400 = 2y + x\pi$, területe a focipálya oldalhosszainak függvényében $T(x) = x \cdot y = x \cdot \frac{(400 - x\pi)}{2} = 200x - \frac{x^2\pi}{2}$, ahol $0 < x < 400/\pi$.

Ekkor $T'(x) = 200 - \pi$, ezért $T'(x) = 0$ ha $x = \frac{200}{\pi}$.

x	(0, 200/π)	200/π	(200/π, 400/π)
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$	mon.nő	lok.max.(20000/π)	mon.csökk.

A globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 200/\pi$. Ekkor $y = 100$, a focipálya területe pedig 20000/π.

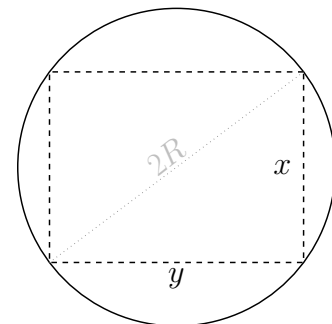
Opcionális(ha marad idő)

F6. (Szöveges szélsőérték feladat) Határozzuk meg az R sugarú körbe írható maximális területű téglalap oldalainak hosszúságát és területét!

Megoldás [F6]. Ha x és y jelöli a téglalap két oldalhosszát, akkor $T = x \cdot y$, és $4R^2 = x^2 + y^2$, tehát $T(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$, a $0 < x < 2R$ feltétel mellett.

$$T'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}(-2x) = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

x	(0, √2R)	√2R	(√2R, 2R)
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$	mon.nő.	lok.max.(2R ²)	mon.csökk.



Globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = y = \sqrt{2}R$ oldalhosszak mellett a terület maximális nagysága $2R^2$.