

8. Gyakorlat - Megoldások

Konvexitás, L'Hospital-szabály, Aszimptoták

F1. (Konvexitás) Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x,$

(b) $f(x) = \frac{x^3}{x-1},$

(c) $f(x) = xe^{-5x}.$

Megoldás [F1].

(a) $f''(x) = (6x^2 - 42x + 36)' = 12x - 42$

x	$(-\infty, 7/2)$	$7/2$	$(7/2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p. $(-91/2)$	konvex

(b)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{x^3}{x-1} \right)'' = \left(\frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} \right)' = \left(\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} \right)' = \\
 &= \left(\frac{(6x^2 - 6x)(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} \right)' = \frac{(6x^2 - 6x)(x-1) - 2(2x^3 - 3x^2)}{(x-1)^3} = \\
 &= \frac{6x^3 - 12x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}
 \end{aligned}$$

A számláló $x = 0$ -ban 0 lesz, $x < 0$ -ra negatív, $x > 0$ esetén pozitív, mivel az $x^2 - 3x + 3$ kifejezés mindig pozitív. A nevező pozitív, ha $x \geq 1$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	konvex	infl.p. (0)	konkáv	konvex

(c) $f''(x) = 5e^{-5x}(5x - 2)$. Mivel e^{-5x} mindenhol pozitív, ezért

x	$(-\infty, 2/5)$	$2/5$	$(2/5, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p. $(2/(5e^2))$	konvex

F2. (L'Hospital-szabály) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határértékeket. Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x - 4)}{\operatorname{tg}(x - 2)},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{3x},$$

$$(c) \text{ (Hf) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

Megoldás [F2].

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x - 4)}{\operatorname{tg}(x - 2)} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} 2 \cos(2x - 4) \cos^2(x - 2) = 2.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{3x} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = 0.$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)} &= \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x) - \cos^3(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x) - \cos^3(x)} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{-2 \cos(x) \sin(x) + 3 \cos^2(x) \sin(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-2 + 3 \cos(x)} = \frac{2}{-2 + 3} = 2. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{xe^x - x} \right) = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} \right) = \frac{0}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{2e^x + xe^x} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

F3. (Aszimptoták) Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozzuk meg az aszimptota egyenesének egyenletét!

$$(a) f(x) = \frac{x^2 + 9}{x},$$

$$(b) f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1},$$

$$(c) \text{ (Hf) } f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x}.$$

Megoldás [F3].

(a)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 9}{x} &= \frac{9}{0+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 + 9}{x} &= \frac{9}{0-} = -\infty \end{aligned} \right\} \text{ az } x = 0 \text{ pólus, itt függőleges aszimptota van } x = 0 \text{ egyenlettel.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x^2} = 1 \text{ illetve } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 9 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x} = 0,$$

azaz a függvény a ∞ -ben az $y = x$ egyeneshez tart.

Hasonlóan a $-\infty$ -ben is ugyanez az egyenes adódik ferde aszimptotának.

(b) A függvény $\mathbb{R}$ -en folytonos, nincsen függőleges aszimptota. Vízszintes aszimptotája a $\pm\infty$ -ben az $y = 2$ egyenes, mivel

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2.$$

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, tehát

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x^3 + 1}{x(x-1)} &= \frac{1}{0-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x^3 + 1}{x(x-1)} &= \frac{1}{0+} = \infty \end{aligned} \right\} \text{ itt függőleges aszimptota van } x = 0 \text{ egyenlettel.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^3 + 1}{x(x-1)} &= \frac{3}{0+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^3 + 1}{x(x-1)} &= \frac{3}{0-} = -\infty \end{aligned} \right\} \text{ itt függőleges aszimptota van } x = 1 \text{ egyenlettel.}$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \infty$, ezért számítsuk ki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 = a,$$

és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - x} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1 - 2x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x} = 2 = b,$$

tehát $y = 2x + 2$ ferde aszimptóta a ∞ -ben. (Hasonlóan a $-\infty$ -ben is ugyanez az egyenes adódik ferde aszimptotának.)