

10. Gyakorlat - Megoldások

Határozatlan integrálok (primitív függvények)

F1. (Primitív fgv. keresése) Keressük meg azt az f függvényt, amelyre

$$(a) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(4) = 1,$$

$$(b) \quad f''(x) = 3e^x + 5 \sin x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2,$$

$$(c) \quad (\text{Hf}) \quad f''(x) = \cos(3x) \text{ és } f(0) = 1 \text{ és } f'(0) = 6.$$

Megoldás [F1]. (a) Ha $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, akkor $\sqrt{x}$ függvény deriválásából $(\sqrt{x} + c)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ látjuk, hogy a primitív függvény $f(x) = \sqrt{x} + c$. Ekkor $f(4) = \sqrt{4} + c = 1$ egyenletnek megfelelő konstans kell választanunk. Így $c = -1$, tehát $f(x) = \sqrt{x} - 1$ a megoldás.

(b) Ha $f''(x) = 3e^x + 5 \sin x$, akkor a $f'(x) = 3e^x - 5 \cos(x) + c_1$ primitív függvények közül választjuk, mivel $(3e^x - 5 \cos(x))' = 3e^x + 5 \sin x$. Ekkor $f'(0) = 3e^0 - 5 \cos(0) + c_1 = 3 - 5 + c_1 = 2$ egyenletnek megfelelő konstans kell választanunk. Így $c_1 = 4$, tehát $f'(x) = 3e^x - 5 \cos(x) + 4$. Ekkor, mivel $(3e^x - 5 \sin(x) + 4x)' = 3e^x - 5 \cos(x) + 4$, ezért $f(x) = 3e^x - 5 \sin(x) + 4x + c_2$ primitív függvények közül $f(0) = 3e^0 - 5 \sin(0) + 4 \cdot 0 + c_2 = 3 - 0 + 0 + c_2 = 1$ egyenletnek megfelelő konstans kell választanunk. Így $c_2 = -2$, tehát $f(x) = 3e^x - 5 \sin(x) + 4x - 2$ a megoldás.

$$(c) \quad f(x) = \frac{-\cos(3x)}{9} + 6x + \frac{10}{9}.$$

F2. (Primitív fgv.) Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

$$(a) \quad \int x^2 + 2x - 3 \, dx$$

$$(b) \quad \int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$$

$$(c) \quad \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$(d) \quad (\text{Hf}) \quad \int (\sqrt{x} + 2)^3 \, dx,$$

Megoldás [F2].

$$(a) \quad \int x^2 + 2x - 3 \, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c,$$

$$(b) \quad \int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c,$$

$$(c) \quad \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + c,$$

$$(d) \quad \int (\sqrt{x} + 2)^3 \, dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 8\sqrt{x^3} + 3x^2 + 8x + c.$$

F3. (Egyszerű helyettesítés) Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

$$(a) \int \frac{1}{(3x-6)^5} dx$$

$$(b) \int \operatorname{sh}(5x-3) dx$$

$$(c) \int x^3(4x^4+6)^{10} dx$$

$$(d) \int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx$$

$$(e) \text{ (Hf) } \int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} dx$$

Megoldás [F3].

$$(a) \int \frac{1}{(3x-6)^5} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x-6)^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{12(3x-6)^4} + c,$$

$$(b) \int \operatorname{sh}(5x-3) dx = \frac{1}{5} \operatorname{ch}(5x-3) + c,$$

$$(c) \int x^3(4x^4+6)^{10} dx = \frac{1}{16} \frac{(4x^4+6)^{11}}{11} + c,$$

$$(d) \int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^{3x}+5} \cdot 3e^{3x} dx = \frac{1}{3} \ln |e^{3x}+5| + c,$$

$$(e) \int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} dx = 2\sqrt{\operatorname{tg}(x)} + c.$$

F4. (Parciális integrálás) A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$(a) \int xe^{3x} dx$$

$$(b) \int x^2 \cos(5x) dx$$

$$(c) \int \arcsin(3x) dx$$

Megoldás [F4].

$$(a) \int xe^{3x} dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c,$$

$$\begin{aligned} (b) \int x^2 \cos(5x) dx &= x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x \cdot \frac{\sin(5x)}{5} dx = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} + 2x \frac{\cos(5x)}{25} + 2 \int \frac{\cos(5x)}{25} dx = \\ &= x^2 \frac{\sin(5x)}{5} + 2x \frac{\cos(5x)}{25} - 2 \frac{\sin(5x)}{125} + c, \end{aligned}$$

$$(c) \int \arcsin(3x) dx = x \arcsin(3x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + c.$$