

11. Gyakorlat - Megoldások

Teljes helyettesítés, parciális törtek és határozott integrálok

F1. (Helyettesítés.) Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$(a) \int e^{\sqrt[3]{x}} dx,$$

$$(b) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx,$$

$$(c) \int x\sqrt{5+x} dx.$$

Megoldás [F1].

$$(a) \text{ Válasszuk } t = \sqrt[3]{x} \text{ helyettesítést, ekkor } x = t^3, \text{ így } \frac{dx}{dt} = 3t^2.$$

$$\text{A változó cseréjével } \int e^{\sqrt[3]{x}} dx = \int e^t \cdot 3t^2 dt$$

A parciális integrálás technikáját kétszer alkalmazva az integrálon

$$\int e^t \cdot 3t^2 dt = e^t \cdot 3t^2 - \int e^t \cdot 6t dt = e^t \cdot 3t^2 - e^t \cdot 6t + \int e^t \cdot 6 dt = e^t \cdot 3t^2 - e^t \cdot 6t + e^t + c = e^t(3t^2 - 6t + 6) + c$$

$$\text{A változót visszacserélve: } \int e^{\sqrt[3]{x}} dx = e^{\sqrt[3]{x}}(3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 6) + c.$$

$$(b) \text{ Válasszuk } t = e^x \text{ helyettesítést, ekkor } x = \ln(t), \text{ így } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{A változó cseréjével } \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctg(t) + c = \arctg(e^x) + c.$$

$$(c) \text{ Válasszuk } t = \sqrt{5+x} \text{ helyettesítést, ekkor } x = t^2 - 5, \text{ így } \frac{dx}{dt} = 2t.$$

$$\begin{aligned} \text{A változó cseréjével } \int x\sqrt{5+x} dx &= \int (t^2 - 5)t \cdot 2t dt = \int 2t^4 - 10t^2 dt = 2\frac{t^5}{5} - 10\frac{t^3}{3} + c = \\ &= \frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} + c. \end{aligned}$$

F2. (Parc.törtek.) Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$$(a) \int \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} dx,$$

$$(b) \int \frac{x + 2}{2x^2 + 5} dx,$$

$$(c) \int \frac{2}{x^2 - 9} dx.$$

Megoldás [F2].

$$(a) \quad \int \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} dx = \int \frac{(x + 4)(x - 3) + 10}{x - 3} dx = \int x + 4 dx + \int \frac{10}{x - 3} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + 10 \ln |x - 3| + c.$$

$$(b) \quad \int \frac{x + 2}{2x^2 + 5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2 + 5} dx + \int \frac{2}{2x^2 + 5} dx = \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 5| + \frac{2}{5} \int \frac{1}{\frac{2}{5}x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 5| + \sqrt{\frac{2}{5}} \int \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \ln |2x^2 + 5| + \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{5}}x \right) + c.$$

$$(c) \quad \int \frac{2}{x^2 - 9} dx = \int \frac{2}{(x - 3)(x + 3)} dx$$

Parciális törtekre bontva: $\frac{2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} = \frac{Ax + 3A + Bx - 3B}{(x - 3)(x + 3)}.$

Tehát $A + B = 0, \quad 3A - 3B = 2 \rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$

$$\int \frac{2}{(x - 3)(x + 3)} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x - 3} dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{x + 3} dx = \frac{1}{3} \ln |x - 3| - \frac{1}{3} \ln |x + 3| + c = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + c.$$

F3. (Határozott integrál.) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

$$(a) \quad \int_0^1 \sqrt{5x + 4} dx,$$

$$(b) \quad \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3} dx,$$

$$(c) \quad \int_1^4 \ln(5x - 2) dx,$$

$$(d) \quad \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx,$$

$$(e) \quad \int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Megoldás [F3].

$$(a) \quad \int_0^1 \sqrt{5x + 4} dx = \left[\frac{2}{15} \sqrt{(5x + 4)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{15} (\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{2(27 - 8)}{15} = \frac{38}{15}.$$

$$(b) \quad \int_1^3 x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (1 + x^3)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{1}{3} \frac{(1 + x^3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_1^3 = \left[\frac{1}{4} (1 + x^3)^{\frac{4}{3}} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt[3]{(1 + 27)^4} - \sqrt[3]{(1 + 1)^4}) = \frac{28^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}}{4}.$$

$$(c) \quad \int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln(x) - x + c, \text{ ezért}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 \ln(5x-2) \, dx &= \frac{1}{5} \left[(5x-2) \ln(5x-2) - (5x-2) \right]_1^4 = \frac{1}{5} (18 \ln(18) - 18 - 3 \ln(3) + 3) = \\ &= \frac{18 \ln(18) - 3 \ln(3) - 15}{5}. \end{aligned}$$

$$(d) \quad \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx = \left[-\cos(\ln(x)) \right]_1^e = -\cos(1) + \cos(0) = 1 - \cos(1).$$

$$(e) \quad \int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)} \, dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \, dx$$

$$x = Ax - 2A + Bx - B \rightarrow A + B = 1, -2A - B = 0 \rightarrow A = -1, B = 2,$$

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx &= \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \, dx = \left[-\ln|x-1| + 2 \ln|x-2| \right]_3^4 = \left[\ln \left| \frac{(x-2)^2}{x-1} \right| \right]_3^4 = \\ &= \ln \left(\frac{4}{3} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{8}{3} \right). \end{aligned}$$