

### 3. Gyakorlat - Megoldások

## Függvények globális tulajdonságai

**F1. (Függvények értelmezési tartománya).** Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

**Megoldás [F1].** Négyzetgyököt csak nemnegatív számból tudunk vonni, így szükséges, hogy  $2x-1 \geq 0$ , azaz  $x \geq \frac{1}{2}$ . Nullával nem tudunk osztani, így  $3x+2 \neq 0$ , azaz  $x \neq -\frac{3}{2}$ . A logaritmus függvény csak pozitív számokon értelmezett, így szükséges, hogy  $|2x-1| > 0$ , ami azt jelenti, hogy  $2x-1 \neq 0$ , azaz  $x \neq \frac{1}{2}$ . Mind a három kikötés szükséges, ami azt jelenti, hogy  $x > \frac{1}{2}$  azaz  $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ .

**F2. (Függvénykompozíció I).** Írjuk fel az  $f \circ g$  és a  $g \circ f$  kompozíciót a következő függvények esetében:

$$(a) \quad f(x) = 1 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(u) = \sqrt{u} \quad (u \geq 0),$$

$$(b) \quad f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(u) = 2^u \quad (u \in \mathbb{R}).$$

**Megoldás [F2].** (a)

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(\sqrt{u}) = 1 - (\sqrt{u})^2 = 1 - u, \quad u \geq 0$$

Ez a kompozíció csak nemnegatív  $u$ -kra értelmes, habár a kapott kifejezés értelmezhető tetszőleges  $u$ -ra is.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

feltéve, hogy a  $g$  függvény értelmezési tartománya miatt  $1 - x^2 \geq 0$ , azaz  $|x| \leq 1$ .

(b) Ebben az esetben nincs gond az értelmezési tartománnyal:

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(2^u) = (2^u)^2 = 2^{2u},$$

használva a hatványozás azonosságait.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{(x^2)}.$$

**F3. (Függvénykompozíció II).** Mely két függvény kompozíciója az alábbi függvények?

$$(a) \quad e^{x^2}, \quad (b) \quad \sin^2(x), \quad (c) \quad \ln(\ln(x)).$$

**Megoldás [F3].** (a) Ha kiszámoljuk a függvény értékét, akkor először a négyzetre emelést kell kiszámolnunk, így ez a belső függvény  $g(u) = u^2$ . Másodszor az  $e$ -re emeljük ezt, tehát az exponenciális függvény a külső függvény,  $f(x) = e^x$ .  $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ .

(b) Először a sinus függvényt kell kiszámolnunk  $g(u) = \sin(u)$ , és ennek eredményét emeljük négyzetre  $f(x) = x^2$ . Azaz  $(f \circ g)(u) = \sin^2(u)$ .  $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ .

(c) Először az  $\ln$  függvényt kell kiszámolnunk  $f(u) = \ln(u)$ , és ennek eredményét ismét az  $f(x) = \ln(x)$  függvénybe írjuk. Azaz  $(f \circ f)(u) = \ln(\ln(u))$ .  $D_{f \circ f} = (1, \infty)$ , hiszen  $\ln(u) > 0$  kell legyen, azaz  $u > 1$ .

**F4. (Invertálhatóság vizsgálata).** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény nem invertálható.

$$f(x) = |x^2 - 7x + 12|.$$

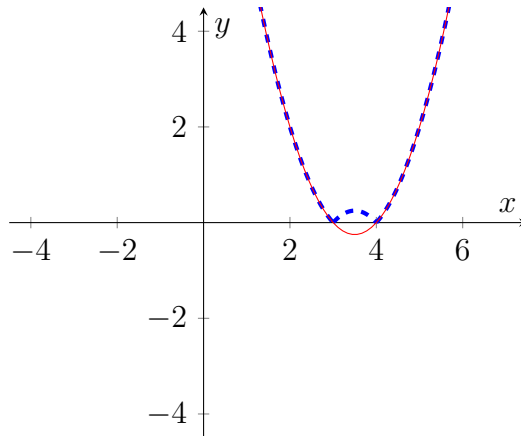
**Megoldás [F4].** A függvény nem injektív, azaz van olyan érték, amit többször vesz fel, például

$$|x^2 - 7x + 12| = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = 3; 4$$

A  $g(x) = x^2 - 7x + 12$  függvény egy felfelé nyitott parabola, melynek tengelye az  $x = 7/2$ , csúcspontja a  $(3.5, -0.25)$ . Ha mindent pontban  $f(x) = |g(x)|$ , akkor a parabola  $x$ -tengely alatti pontjait feltükröztvén kapjuk az  $f$  grafikonját.



**F5. (Inverz számítása)** Invertálhatóak-e az alábbi függvények? Ha igen, állítsuk elő az inverz függvényt!

$$(a) f(x) = \frac{x-2}{2x+3} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\},$$

$$(b) \text{ (Hf) } f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

$$(c) f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 \quad x \in (0, \pi),$$

$$(d) \text{ (Hf) } f(x) = \sqrt[3]{27-x^3}.$$

**Megoldás [F5].** (a) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az  $f(x_1) = f(x_2)$  egyenlőségből következzen, hogy  $x_1 = x_2$ . Ebben az esetben:

$$\frac{x_1-2}{2x_1+3} = \frac{x_2-2}{2x_2-3}$$

$$(x_1-2)(2x_2+3) = (x_2-2)(2x_1+3)$$

$$2x_1x_2 - 4x_2 + 3x_1 - 6 = 2x_1x_2 - 4x_1 + 3x_2 - 6$$

$$7x_1 = 7x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha  $f(x) = y$  akkor keressük meg, hogy adott  $y$  esetén hogyan fejezhető ki  $x$ .

$$\frac{x-2}{2x+3} = y$$

$$x-2 = y(2x+3)$$

$$x-2 = 2xy+3y$$

$$x-2xy = 3y+2$$

$$x(1-2y) = 3y+2$$

$$x = \frac{3y+2}{1-2y}, \quad \text{ha } y \neq \frac{1}{2}.$$

Azonban  $y \neq \frac{1}{2}$  teljesül, hiszen ha

$$\frac{x-2}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

$$2x-4 = 2x+3$$

$$-4 \neq 3.$$

Így az inverzfüggvény  $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{1-2x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ .

(b) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az  $f(x_1) = f(x_2)$  egyenlőségből következzen, hogy  $x_1 = x_2$ . Ebben az esetben:

$$\frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2}$$

$$(x_1+1)(x_2-2) = (x_2+1)(x_1-2)$$

$$x_1x_2+x_2-2x_1-2 = x_1x_2+x_1-2x_2-2$$

$$3x_2 = 3x_1$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha  $f(x) = y$  akkor keressük meg, hogy adott  $y$  esetén hogyan fejezhető ki  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} &= y \\ x+1 &= y(x-2) \\ x+1 &= xy-2y \\ x-xy &= -1-2y \\ x(1-y) &= -1-2y \\ x &= \frac{2y+1}{y-1}, \quad \text{ha } y \neq 1. \end{aligned}$$

Azonban  $y \neq 1$  teljesül, hiszen ha

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} &= 1 \\ x+1 &= x-2 \\ 1 &\neq -2. \end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

(c) Hasonlóan az előzőhöz  $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ -ra (ekkor  $(x_{1,2} - \pi/2) \in (-\pi/2, \pi/2)$ -on van):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) - 7 &= \operatorname{tg}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) - 7 \\ \operatorname{tg}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{tg}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

A  $(0, \pi)$  intervallumban a  $\operatorname{tg}(x - \pi/2)$  függvény szigorúan monoton nő, ebben a periódusban minden értéket egyszer vesz fel, tehát itt következik, hogy

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{\pi}{2} &= x_2 - \frac{\pi}{2} \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Tehát invertálható a függvény. Az inverz kiszámításához:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 &= y \\ \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= y + 7\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a keresett  $x$ -re  $(x - \frac{\pi}{2}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , így az  $\operatorname{arctg}$  függvény pontosan a megfelelő értéket adja meg:

$$\begin{aligned}x - \frac{\pi}{2} &= \operatorname{arctg}(y + 7) \\ x &= \operatorname{arctg}(y + 7) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Tehát az inverz függvény:  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x + 7) + \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(d) Invertálható, és az inverz az eredeti függvény!

### Opcionális(ha marad idő)

**F6.** Állapítsuk meg, hogy az adott függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy egyik tulajdonságot sem teljesítik!

(a)  $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$ ,

(b)  $f(x) = x^{-5} \cdot \sin(x) + 3$ .

**Megoldás [F6].** (a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ , páratlan, mert

$$f(-x) = \frac{-5x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{5x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

(b)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , páros(= páratlan  $\cdot$  páratlan+páros), mert

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^5} \cdot \sin(-x) + 3 = -x^{-5} \cdot -\sin(x) + 3 = f(x).$$