5. Gyakorlat - Megoldások
Függvények határértéke, folytonossága

F1. (Határértékszámítás) Számítsuk ki a következő határértékeket!

$(a)\quad \lim\limits_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7,$

$(b)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^3-10x+1},$

$(c)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x^2}{2x-6}, \qquad \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-x^2}{2x-6}, \qquad \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{x-x^2}{2x-6},$

(d)(**Hf**) $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+4x^3+x}{7-x^2},$

$(e)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1},$

(f)(**Hf**) $\quad \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),$

(g)(**Hf**) $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x},$

$(h)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)},$

$(i)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}.$

Megoldás [F1].

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7 = \text{”}\infty-\infty\text{”} = \lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(1-\frac{-3}{x}+\frac{7}{x^3}\right) = \infty\cdot(1+0+0) = \infty.$$

$$(b)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^3-10x+1} = \frac{\text{”}\infty\text{”}}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{x-\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1+0+0}{-\infty-0+0} = 0.$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x-x^2}{2x-6} = \frac{0-0}{0-6} = \frac{0}{-6} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-x^2}{2x-6} = \frac{\text{”}\infty-\infty\text{”}}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{2-\dfrac{6}{x}} = \frac{1-\infty}{2-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x-x^2}{2x-6} \underset{x=3+h,\,h>0}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{(3+h)-(3+h)^2}{2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-6-5h-h^2}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} (-6-5h-h^2)\cdot\frac{1}{2h} = (-6)\cdot\infty = \infty = -\infty,$$

vagy

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x-x^2}{2x-6} = \lim_{x\to 3+} \frac{x-x^2}{2(x-3)} = \frac{-6}{2\cdot 0+} = -\infty.$$

$(d)\quad -\infty.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{"0"}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=$$

$$=\frac{1\cdot(1+1)}{1+1}=1.$$

(f) $\dfrac{1}{2}$.

(g) e^4.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{7x}\frac{3x}{\sin(3x)}\frac{7}{3}=1\cdot 1\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\cdot\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=2\cdot 1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

F2. (Féloldali határértékek) Számítsuk ki az $x_0=1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét az alábbi függvénynek!

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3-1}\qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}).$$

Megoldás [F2].

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+x-1}{x^3-1}\underset{x=1+h}{=}\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)^2+(1+h)-1}{(1+h)^3-1}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+3h+1}{h^3+3h^2+3h}=$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\cdot\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+3h+1}{h^2+3h+3}=\infty\cdot\frac{0+0+1}{0+0+3}=\infty.$$

vagy $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+x-1}{x^3-1}\underset{x^3>1}{=}\frac{1}{0+}=\infty.$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+x-1}{x^3-1}\underset{x=1-h}{=}\lim_{h\to 0-}\frac{(1-h)^2+(1-h)-1}{(1-h)^3-1}=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2-3h+1}{-h^3+3h^2-3h}=$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{1}{h}\cdot\lim_{h\to 0-}\frac{h^2-3h+1}{-h^2+3h-3}=\infty\cdot\frac{0+0+1}{0+0-3}=-\infty.$$

vagy $\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+x-1}{x^3-1}\underset{x^3<1}{=}\frac{1}{0-}=-\infty.$

F3. (Szakadási helyek) Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$(a)\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{2,5\},\\ 0, & \text{ha } x=2,\ x=5;\end{cases}$$

$$(b)\ \ f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 1, & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

$$(c)\ \ \textbf{(Hf)}\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;3\},\\ 1, & \text{ha } x=-2 \text{ vagy } x=3.\end{cases}$$

Megoldás [F3].

$$(a)\quad f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)}=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-5} & x\neq 2,5\\ 0 & x=2 \text{ vagy } x=5\end{cases}$$

Ezért 2-ben $\displaystyle\lim_{x\to 2\pm}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2\pm}\frac{x-3}{x-5}=\frac{2-3}{2-5}=\frac{1}{3},$

Tehát az $x_0=2$-ben a két féloldali határérték egyenlő, a szakadás megszűntethető.

Az $x_0=5$ helyen:
$$\lim_{x\to 5+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}\underset{x=5+h}{=}\lim_{h\to 0+}\frac{(5+h)-3}{h}=2\cdot\infty=\infty.$$
$$\lim_{x\to 5-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}\underset{x=5-h}{=}\lim_{h\to 0+}\frac{(5-h)-3}{-h}=2\cdot-\infty=-\infty.$$

Az $x_0=5$-ben a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás pólus.

(b) Vizsgálva a határértékeket 0-ban

$$\lim_{x\to 0+}e^{-1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{1/x}}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to 0-}e^{-1/x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{e^{1/x}}=\frac{1}{e^{-\infty}}=\frac{1}{0+}=\infty,$$

$x_0=0$-ban a két féloldali határérték közül az egyik nem létezik, a szakadás másodfajú(de nem pólus).

(c) $x_0=-2$-ben a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás pólus.

$x_0=3$-ben a két féloldali határérték egyenlő, pontosan 1, ezért megszűntethető a szakadás. Mivel a két féloldali határérték megegyezik a függvényértékkel, ezért nincs szakadás a grafikonon.