

6. Gyakorlat - Megoldások

Differenciálszámítás

F1. (Függvények deriváltja) Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

$$(a) \quad f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11,$$

$$(b) \quad f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$$

$$(c) \quad f(x) = 3^x - \cos(x)$$

$$(d) \quad f(x) = (1 + x^3) \operatorname{tg}(x)$$

$$(e) \quad (\mathbf{Hf}) \quad f(x) = e^x \cdot \sin(x)$$

$$(f) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 2}$$

$$(g) \quad f(x) = \operatorname{th}(x)$$

$$(h) \quad (\mathbf{Hf}) \quad f(x) = \frac{x^3}{\log_2(x)}$$

$$(i) \quad f(x) = \frac{\ln^2(x)}{5x}$$

$$(j) \quad (\mathbf{Hf}) \quad f(x) = \frac{(x + 5) \operatorname{sh}(x)}{\sqrt{x}}$$

Megoldás [F1].

$$(a) \quad f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 5x + 11)' = (x^3)' - 5(x^2)' + 5(x)' + (11)' = 3x^2 - 5(2x) + 5 + 0 = 3x^2 - 10x + 5.$$

$$(b) \quad f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5} \right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5} \cdot (-5)x^{-6} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

$$(c) \quad f'(x) = (3^x - \cos(x))' = 3^x \cdot \ln(3) - (-\sin(x)) = \ln(3) \cdot 3^x + \sin(x).$$

$$(d) \quad f'(x) = ((1 + x^3)\operatorname{tg}(x))' = (1 + x^3)'\operatorname{tg}(x) + (1 + x^3)\operatorname{tg}'(x) = (0 + 3x^2)\operatorname{tg}(x) + (1 + x^3)\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$(e) \quad f'(x) = (e^x \sin(x))' = e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

$$(f) \quad f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2}{x - 2} \right)' = \frac{(x^3 + 2)'(x - 2) - (x^3 + 2)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{3x^2(x - 2) - (x^3 + 2) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \\ = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3 - 2}{(x - 2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{(x - 2)^2}.$$

$$(g) \quad f'(x) = (\operatorname{th}(x))' = \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right)' = \frac{(\operatorname{sh}(x))'\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)(\operatorname{ch}(x))'}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \\ = 1 - (\operatorname{th}(x))^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

$$(h) \quad f'(x) = \left(\frac{x^3}{\log_2(x)} \right)' = \frac{3x^2}{\log_2(x)} - \frac{x^2}{\ln(2) \cdot (\log_2(x))^2}.$$

$$(i) \quad f'(x) = \left(\frac{\ln^2(x)}{5x} \right)' = \frac{(\ln^2(x))'(5x) - \ln^2(x) \cdot 5}{25x^2} = \frac{2 \ln(x) \frac{1}{x} \cdot (5x) - 5 \ln^2(x)}{25x^2} = \frac{10 \ln(x) - 5 \ln^2(x)}{25x^2},$$

$$\text{mivel } (\ln^2(x))' = (\ln(x) \cdot \ln(x))' = \left(\frac{1}{x} \ln(x) + \ln(x) \frac{1}{x} \right) = 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

$$(j) \quad f'(x) = \left(\frac{(x + 5) \operatorname{sh}(x)}{\sqrt{x}} \right)' = \left(\left(\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) \operatorname{sh}(x) \right)' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x^3}} \right) \operatorname{sh}(x) + \left(\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) \operatorname{ch}(x).$$

F2. (Érintők)

(a) Legyen

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Számítsuk ki $f'(x)$ -et. Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő irántangense? Írjuk fel az $x_0 = 1$ pontban az érintőegyenes egyenletét.

(b) Írjuk fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0 = \pi$ pontban. Lesz-e a függvénynek vízszintes érintője?

(c) **(Hf)** Írjuk fel az $f(x) = (x^2+1)e^x$ függvény $x_0 = 0$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

Megoldás [F2]. (a) $f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(-1)(1+x) - (1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$

Ha $x_0 = 1$, akkor $f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2}$ az irántangens nagysága. Így az érintő egyenlete $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Azaz $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 0$.

(b) $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$, $f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $f(\pi) = \sin(\pi) = 0$, tehát az érintő egyenlete $y = (-1)(x - \pi) + 0 = \pi - x$.

Az érintő akkor vízszintes, ha $f'(x_0) = 0$. Keressük a derivált függvény zérushelyeit. $f'(x) = \cos(x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ezekben a pontokban az érintő vízszintes, meredeksége 0. Például az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ -ben az egyenlet $y = 0(x - \pi/2) + \sin(\pi/2) = 1$.

(c) $f'(x) = ((x^2+1)e^x)' = 2xe^x + (x^2+1)e^x$, $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^0 + (0^2+1)e^0 = 0 + 1 = 1$, $f(0) = (0^2+1)e^0 = 1$. Tehát az érintő egyenlete $y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$.

F3. (Láncszabály) Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $(3x^2 + 4x + 1)^5$,

(b) $\frac{1}{(1 + \sqrt[3]{x})^3}$,

(c) **(Hf)** $\sqrt{x^2 + 1}$,

(d) **(Hf)** e^{x^4} ,

(e) $\cos(e^{2x+3})$.

Megoldás [F3].

$$(a) \quad f'(x) = ((3x^2 + 4x + 1)^5)' = 5(3x^2 + 4x + 1)^4 \cdot (6x + 4).$$

$$(b) \quad f'(x) = \left((1 + \sqrt[3]{x})^{-3} \right)' = (-3)(1 + \sqrt[3]{x})^{-4} \cdot \left(0 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \right) = \frac{-3}{(1 + \sqrt[3]{x})^4} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-1}{(1 + \sqrt[3]{x})^4 \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$(c) \quad f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$(d) \quad f'(x) = (e^{x^4})' = e^{x^4} 4x^3.$$

$$(e) \quad f'(x) = (\cos(e^{2x+3}))' = -\sin(e^{2x+3}) \cdot (e^{2x+3})' = -\sin(e^{2x+3}) \cdot e^{2x+3} \cdot (2x + 3)' = \\ = -\sin(e^{2x+3}) \cdot e^{2x+3} \cdot 2.$$