7. Gyakorlat - Megoldások
Szélsőértékek, monotonitás

F1. (Monotonitás, szélsőérték.) Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2+1}$, $\quad D_f = \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x - \ln(1+x)$, $\quad D_f = (-1, +\infty)$,

(c) **(Hf)** $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $\quad D_f = \mathbb{R}$.

Megoldás [F1]. (a) $\quad f'(x) = \dfrac{3x^2(3x^2+1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4+3x^2}{(3x^2+1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ így a függvény monoton növő $\mathbb{R}$-en és ott szigorúan monoton növő, mivel a derivált csak 0-ban lesz 0. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$, de ott a deriváltfüggvény nem vált előjelet, tehát nincs szélsőértéke.

(b) $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, a nevező pozitív, mivel $x > -1$, így $f' < 0$, ha $x < 0$, valamint $f' > 0$ ha $x > 0$. $f' = 0$, ha $x = 0$, itt f' negatívból pozitív értékekbe vált, tehát lokális minimuma van a függvénynek. Értéke $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$.

(c) $\quad$ Lokális maximum értéke van az $x = 1$ helyen: $f(1) = 2$, és lokális minimum értéke van az $x = 3$-ban: $f(3) = -26$.

F2. (Globális szélsőértékek.) Határozzuk meg az adott intervallumon az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a függvény a szélsőértékeket.

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $\quad x \in [-1, 5]$,

(b) $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$, $\quad x \in (0, +\infty)$,

(c) **(Hf)** $f(x) = x^3 - 4x$, $\quad x \in [0, +\infty)$.

Megoldás [F2]. (a) $\quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2)$, $f'(x) = 0$, ha $x = 1$ vagy $x = -2$, de ez nincs a vizsgált tartományban.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	mon.nő	lok.max.	mon.csökk.	(14)	mon.csökk.	lok.min. (-6)	mon.nő	(266)	mon.nő

Globális maximum értéke: $f(5) = 266$, globális minimum értéke $f(1) = -6$ megegyezik a lokális minimummal.

$(b)\quad f'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2}$, $f'(x) = 0$, ha $x = \pm 10$.

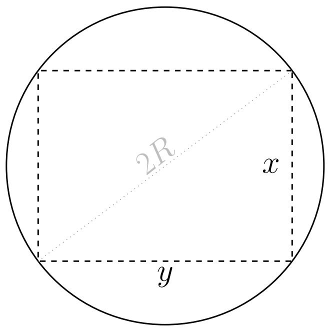
x	$(-\infty, -10)$	-10	$(-10, 0)$	0	$(0, 10)$	10	$(10, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.é.	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon.nő	lok.max.	mon.csökk.	n.é.	mon.csökk.	lok.min.(40)	mon.nő

Itt $\lim\limits_{x \to 0+} 2 + \dfrac{200}{x} = \infty$, tehát lokális maximum értéke nincsen a függvénynek az adott tartományban. Mivel $\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \dfrac{200}{x} = \infty$ szintén, így a globális minimum értéke $f(10) = 40$, megegyezik a lokális minimummal.

$(c)\quad$ Globális minimuma van az $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$-ban, a minimum értéke: $-\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$.

F3. (Szöveges szélsőérték feladat) Határozzuk meg az R sugarú körbe írható maximális területű téglalap oldalainak hosszúságát és területét!

Megoldás [F3]. Ha x és y jelöli a téglalap két oldalhosszát, akkor $T = x \cdot y$, és $4R^2 = x^2 + y^2$, tehát $T(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$, a $0 < x < 2R$ feltétel mellett.



$$T'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}(-2x) = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

x	$(0, \sqrt{2}R)$	$\sqrt{2}R$	$(\sqrt{2}R, 2R)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	mon.nő.	lok.max.$(2R^2)$	mon.csökk.

Globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = y = \sqrt{2}R$ oldalhosszak mellett a terület maximális nagysága $2R^2$.

F4. (Szöveges szélsőérték feladat) Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek x%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $\frac{x}{50}$-ed részét elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

Megoldás [F4]. A befolyt adó értéke az adókulcs függvényében

$$a(x) = 10^{13} \cdot \frac{x}{100} - 10^{13} \cdot \frac{x}{100}\frac{x}{50} = 10^{11}\left(x - \frac{x^2}{50}\right), \qquad 0 \le x \le 100, \text{ tehát}$$

$$a'(x) = 10^{11}\left(1 - \frac{2x}{50}\right) = 10^{11}\left(\frac{50 - 2x}{50}\right), \text{ ahol } a'(x) = 0 \text{ ha } x = 25.$$

x	0	$(0, 25)$	25	$(25, 100)$	100
$a'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$a(x)$	mon.nő(0)	mon.nő	lok.max.$(12,5 \cdot 10^{11})$	mon.csökk.	mon.csökk.(-10^{13})

Így a függvény globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 25$. 25%-os adókulcs bevezetése a legjobb.

F5. (Hf) Adri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra darabonként x petákot költ, akkor darabját $6\sqrt{x}$ petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?

Megoldás [F5]. 9 petákot kell költenie darabonként az előállításra.

Opcionális(ha marad idő)

F6. Egy futópályát építenek egy téglalap alakú focipálya körül úgy, hogy a focipálya két hosszabb oldala mentén egyenes, rövidebb oldala mentén félkörpályát alakítanak ki. A futópálya teljes hossza 400 méter lesz. Mekkora legyen a focipálya oldalainak hossza, hogy a területe maximális legyen?

Megoldás [F6]. A pálya kerülete $400 = 2y + x\pi$, területe a focipálya oldalhosszainak függvényében $T(x) = x \cdot y = x \cdot \dfrac{(400 - x\pi)}{2} = 200x - \dfrac{x^2\pi}{2}$, ahol $0 < x < 400/\pi$.

Ekkor $T'(x) = 200 - \pi$, ezért $T'(x) = 0$ ha $x = \dfrac{200}{\pi}$.

x	$(0, 200/\pi)$	$200/\pi$	$(200/\pi, 400/\pi)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	mon.nő	lok.max.$(2000/\pi)$	mon.csökk.

A globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 200/\pi$. Ekkor $y = 100$, a focipálya területe pedig $2000/\pi$.