9. Gyakorlat - Megoldások
Teljes függvényvizsgálat

F1. (Fgv.vizsgálat.) Az alábbi függvényeken végezzünk teljes függvényvizsgálatot:

(a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$,

(b) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^2$,

(c) **(Hf)** $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x}$,

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$,

(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$,

(f) **(Hf)** $f(x) = xe^{-2x}$.

Megoldás [F1]. (a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
2. zérushely: $a = x^2$ helyettesítéssel másodfokú kifejezés $a^2 - 5a + 4 = 0$ gyökei az 1 és a 4. Így a függvény szorzat alakja: $f(x) = (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.
3. paritás: $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$, tehát páros.

   periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).
4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^4 - 5x^2 + 4 = \lim_{x\to\infty} x^4\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 - 5x^2 + 4 = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) = \infty$$

Nincs vízszintes aszimptota.

Ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^3 - 5x + \frac{4}{x} = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) = \infty.$$

Nincs ferde aszimptota a $+\infty$-ben. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben sincsen.

5. első derivált: $f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$,

   melynek $x = 0$ és $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ a zérushelyei.

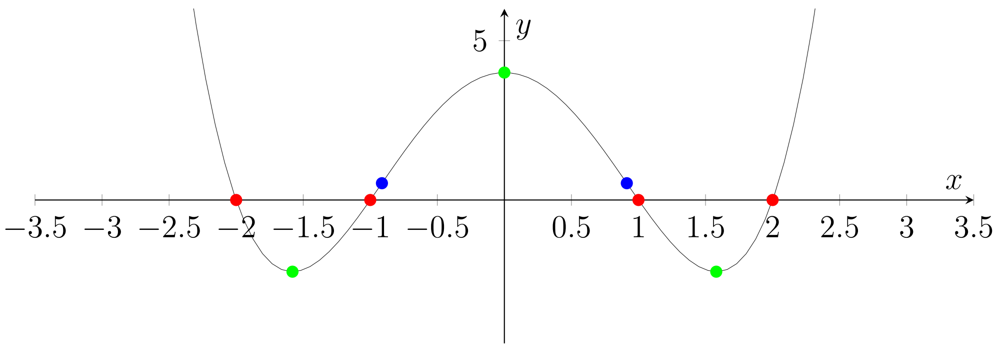
x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}})$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$	0	$(0, \sqrt{\frac{5}{2}})$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$(\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

A lokális maximum értéke: $f(0) = 4$, a lokális minimum értéke: $f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = -\frac{9}{4}$.

6. második derivált: $f''(x) = 12x^2 - 10$, melynek nullhelyei az $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}})$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}})$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

7.



8. értékkészlet: $\left[-\dfrac{9}{4}, \infty\right)$.

(b) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)^2$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

2. zérushely: $x = 1$

3. paritás: $f(-x) = \left(\dfrac{-x-1}{-2x+1}\right)^2 = \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^2 \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

   periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}+} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \frac{9}{4} \lim_{x\to -\frac{1}{2}+} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(0+)^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}-} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \frac{9}{4} \lim_{x\to -\frac{1}{2}-} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(0-)^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

   $x = -\dfrac{1}{2}$-nél függőleges aszimptota van. Az $y = \dfrac{1}{4}$ vízszintes aszimptota.

5. első derivált: $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{x-1}{2x+1} \cdot \dfrac{2x+1-2(x-1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{6(x-1)}{(2x+1)^3}$, melynek $x = 1$ a zérushelye.

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

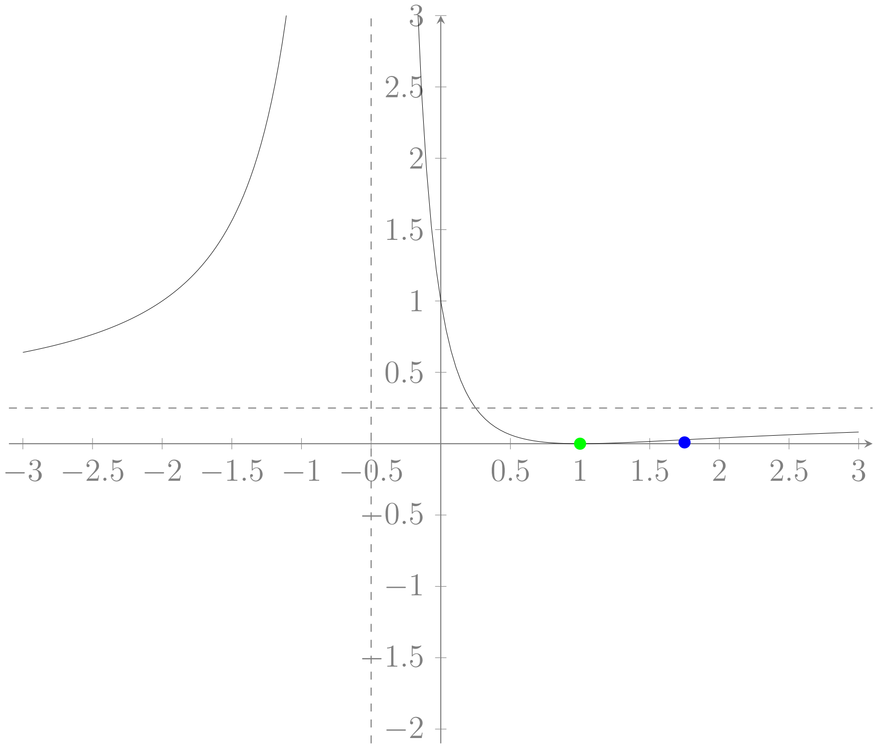
   A lokális minimum értéke: $f(1) = 0$.

6. második derivált: $f''(x) = 6 \cdot \dfrac{(2x+1)^3 - (x-1)3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = 6 \cdot \dfrac{(2x+1) - 6(x-1)}{(2x+1)^4} =$

$6 \cdot \dfrac{7-4x}{(2x+1)^4}$, melynek nullhelye az $x = \dfrac{7}{4}$.

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$	$\frac{7}{4}$	$(\frac{7}{4}, \infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\smile$	$\smile$	infl.	$\frown$

7.



8. értékkészlet: $[0, \infty)$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x}$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

2. zérushely: $x = \pm\sqrt{3}$

3. paritás: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-3}{2+x} = \dfrac{x^2-3}{2+x} \neq f(x)$, tehát nincs paritása.

   periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x^2-3}{2-x} = \frac{1}{0-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{x^2-3}{2-x} = \frac{1}{0+} = \infty$$

   Az $x = 2$ függőleges aszimptóta.

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-3}{2-x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3}{2-x} = \infty$$

   Nincs vízszintes aszimptota.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-\frac{3}{x}}{2-x} = -1$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3+2x-x^2}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3+2x}{2-x} = -2$$

   így a ferde aszimptota a $+\infty$-ben $y = -x-2$. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben ugyanez az egyenes.

5. első derivált: $f'(x) = \dfrac{2x(2-x)+(x^2-3)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x-x^2-3}{(2-x)^2}$,

   melynek $x = 3$ és $x = 1$ a zérushelyei.

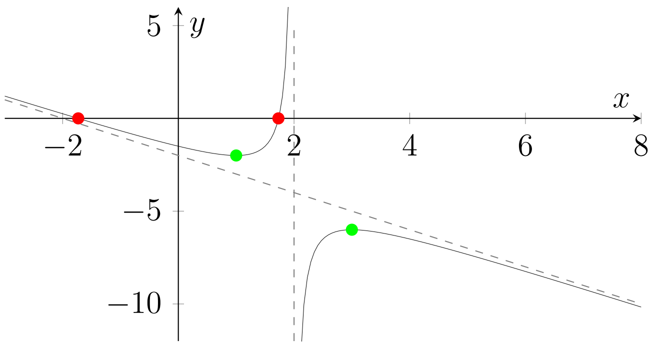
x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

A lokális minimum értéke: $f(1) = -2$, a lokális maximum értéke: $f(3) = -6$.

6. második derivált: $f''(x) = \dfrac{(4-2x)(2-x)^2 + (4x - x^2 - 3)2(2-x)}{(2-x)^4} = \dfrac{2}{(2-x)^3}$, melynek nincs zérushelye.

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
f''	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$

7.



8. értékkészlet: $\mathbb{R} \setminus (-6, -2) = (-\infty, -6] \cup [-2, \infty)$.

$(d) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus (2,3) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

2. zérushely: $x = 2, 3$

3. paritás: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 5x + 6} \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

   periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$$
$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$$

   Nincs függőleges aszimptóta.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

   Nincs vízszintes aszimptota.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = -\frac{5}{2}$$

   így a ferde aszimptota a $+\infty$-ben $y = x - \frac{5}{2}$. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben az $y = -x + \frac{5}{2}$ egyenes.

5. első derivált: $f'(x) = \dfrac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$,

melynek $x = \dfrac{5}{2}$ a zérushelye.

x	$(-\infty, 2]$	$[3, +\infty)$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

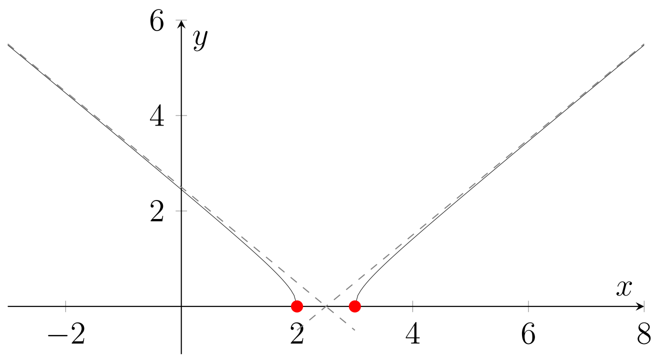
6. második derivált:

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2-5x+6} - (2x-5)\dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}}}{4x^2-20x+24} = \frac{4x^2-20x+24-(2x-5)^2}{2^3\sqrt{x^2-5x+6}^3} = -\frac{1}{4\sqrt{x^2-5x+6}^3},$$

melynek nincs zérushelye.

x	$(-\infty, 2]$	$[3, \infty)$
f''	$-$	$-$
f	$\frown$	$\frown$

7.



8. értékkészlet: $[0, \infty)$.

(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

2. zérushely: nincs

3. paritás: $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x+1} \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

   periodicitás: nem periodikus.

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-x}+1} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0$$

   Nincs függőleges aszimptóta. Vízszintes aszimptota van a ∞-ben: $y=1$, a $-\infty$-ben pedig $y=0$. Ferde aszimptota nincs.

5. első derivált: $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$, melynek nincs zérushelye.

x	$(-\infty, +\infty)$
f'	$+$
f	$\nearrow$

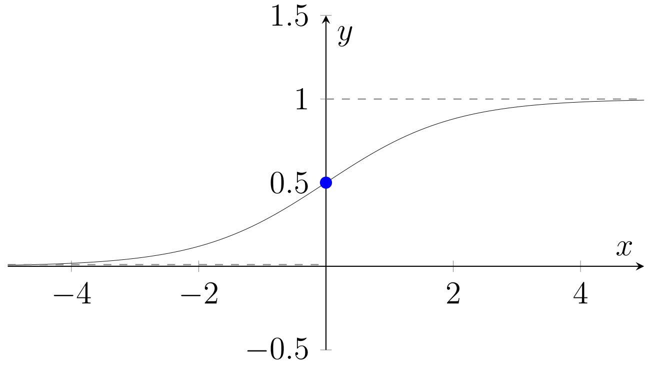
6. második derivált:

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x + 2e^{2x} + e^{3x} - 2e^{2x} - 2e^{3x}}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3},$$

   melynek zérushelye az $x=0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl.	$\frown$

7.



8. értékkészlet: $(0, 1)$.

$(f)\quad f(x) = xe^{-2x}$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

2. zérushely: $x = 0$

3. paritás: $f(-x) = (-x)e^{2x} \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

   periodicitás: nem periodikus.

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-2x} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

   Nincs függőleges aszimptóta. Vízszintes aszimptota van a ∞-ben: $y = 1$. Ferde aszimptota nincs.

5. első derivált: $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2xe^{2x}}{e^{4x}} = \dfrac{1-2x}{e^{2x}}$, melynek zérushelye az $x = \frac{1}{2}$.

x	$(-\infty, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

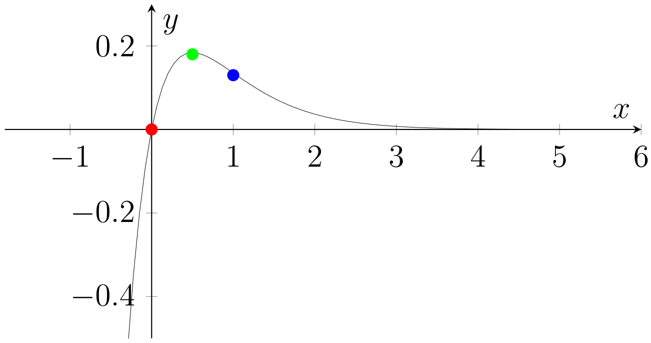
   A lokális maximum értéke $f(1/2) = \dfrac{1}{2e}$.

6. második derivált:

   $f''(x) = \dfrac{-2e^{2x} - (1-2x)2e^{2x}}{e^{4x}} = \dfrac{4x-4}{e^{2x}}$, melynek zérushelye az $x = 1$.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$

7.



8. értékkészlet: $(-\infty, \frac{1}{2e})$.