10. Gyakorlat - Megoldások
Határozatlan integrálok (primitív függvények)

F1. (Primitív fgv. keresése) Keressük meg azt az f függvényt, amelyre

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(4) = 1,$

(b) $f''(x) = 3e^x + 5\sin x, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 2,$

(c) **(Hf)** $f''(x) = \cos(3x)$ és $f(0) = 1$ és $f'(0) = 6$.

Megoldás [F1]. (a) Ha $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, akkor $\sqrt{x}$ függvény deriválásából $(\sqrt{x} + c)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ látjuk, hogy a primitív függvény $f(x) = \sqrt{x} + c$. Ekkor $f(4) = \sqrt{4} + c = 1$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c = -1$, tehát $f(x) = \sqrt{x} - 1$ a megoldás.

(b) Ha $f''(x) = 3e^x + 5\sin x$, akkor a $f'(x) = 3e^x - 5\cos(x) + c_1$ primitív függvények közül választjuk, mivel $(3e^x - 5\cos(x))' = 3e^x + 5\sin x$. Ekkor $f'(0) = 3e^0 - 5\cos(0) + c_1 = 3 - 5 + c_1 = 2$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c_1 = 4$, tehát $f'(x) = 3e^x - 5\cos(x) + 4$. Ekkor, mivel $(3e^x - 5\sin(x) + 4x)' = 3e^x - 5\cos(x) + 4$, ezért $f(x) = 3e^x - 5\sin(x) + 4x + c_2$ primitív függvények közül $f(0) = 3e^0 - 5\sin(0) + 4 \cdot 0 + c_2 = 3 - 0 + 0 + c_2 = 1$ egyenletnek megfelelő konstanst kell választanunk. Így $c_2 = -2$, tehát $f(x) = 3e^x - 5\sin(x) + 4x - 2$ a megoldás.

(c) $f(x) = \dfrac{-\cos(3x)}{9} + 6x + \dfrac{10}{9}$.

F2. (Primitív fgv.) Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

(a) $\displaystyle\int x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(d) **(Hf)** $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + 2\right)^3\,\mathrm{d}x,$

Megoldás [F2].

(a) $\displaystyle\int x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c,$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c,$

(c) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + c,$

(d) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + 2\right)^3\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 8\sqrt{x^3} + 3x^2 + 8x + c.$

F3. (Egyszerű helyettesítés) Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-6)^5}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{sh}(5x-3)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x^3(4x^4+6)^{10}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$

(e) **(Hf)** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\mathrm{tg}(x)}}\,\mathrm{d}x$

Megoldás [F3].

(a) $$\int \frac{1}{(3x-6)^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(3x-6)^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{12(3x-6)^4} + c,$$

(b) $$\int \mathrm{sh}(5x-3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{ch}(5x-3) + c,$$

(c) $$\int x^3(4x^4+6)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\frac{(4x^4+6)^{11}}{11} + c,$$

(d) $$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{e^{3x}+5}\cdot 3e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}+5\right| + c,$$

(e) $$\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\mathrm{tg}(x)}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{tg}(x)} + c.$$

F4. (Parciális integrálás) A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\displaystyle\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x$

Megoldás [F4].

(a) $$\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c,$$

(b) $$\int x^2\cos(5x)\,\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin(5x)}{5} - \int 2x\cdot\frac{\sin(5x)}{5}\,\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin(5x)}{5} + 2x\frac{\cos(5x)}{25} + 2\int \frac{\cos(5x)}{25}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x^2\frac{\sin(5x)}{5} + 2x\frac{\cos(5x)}{25} - 2\frac{\sin(5x)}{125} + c,$$

(c) $$\int \arcsin(3x)\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(3x) + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + c.$$