11. Gyakorlat - Megoldások
Teljes helyettesítés, parciális törtek és határozott integrálok

F1. (Helyettesítés.) Alkalmas helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$(a)\ \int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x,$

$(b)\ \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x,$

$(c)\ \int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás [F1].

(a) Válasszuk $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítést, ekkor $x = t^3$, így $\frac{dx}{dt} = 3t^2$.

A változó cseréjével $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int e^t \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t$

A parciális integrálás technikáját kétszer alkalmazva az integrálon

$$\int e^t \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = e^t \cdot 3t^2 - \int e^t \cdot 6t\,\mathrm{d}t = e^t \cdot 3t^2 - e^t \cdot 6t + \int e^t \cdot 6\,\mathrm{d}t = e^t \cdot 3t^2 - e^t \cdot 6t + e^t + c = e^t(3t^2 - 6t + 6) + c$$

A változót visszacserélve: $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = e^{\sqrt[3]{x}}(3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 6) + c.$

(b) Válasszuk $t = e^x$ helyettesítést, ekkor $x = \ln(t)$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$.

A változó cseréjével $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg}(t) + c = \operatorname{arctg}(e^x) + c.$

(c) Válasszuk $t = \sqrt{5+x}$ helyettesítést, ekkor $x = t^2 - 5$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$.

A változó cseréjével $\int x\sqrt{5+x}\,\mathrm{d}x = \int (t^2-5)t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int 2t^4 - 10t^2\,\mathrm{d}t = 2\frac{t^5}{5} - 10\frac{t^3}{3} + c =$

$$= \frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} + c.$$

F2. (Parc.törtek.) Határozzuk meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$(a)\ \int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x,$

$(b)\ \int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x,$

$(c)\ \int \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás [F2].

(*a*) $$\int \frac{x^2+x-2}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x+4)(x-3)+10}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int x+4\,\mathrm{d}x + \int \frac{10}{x-3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4x + 10\ln|x-3| + c.$$

(*b*) $$\int \frac{x+2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5\right| + \frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{2}{5}x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+5| + \sqrt{\frac{2}{5}}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5\right| + \sqrt{\frac{2}{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + c.$$

(*c*) $$\int \frac{2}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(x-3)(x+3)}\,\mathrm{d}x$$

Parciális törtekre bontva: $\dfrac{2}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3} = \dfrac{Ax+3A+Bx-3B}{(x-3)(x+3)}$.

Tehát $A+B=0,\quad 3A-3B=2 \to A=\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{1}{3}$

$$\int \frac{2}{(x-3)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\ln|x+3| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c.$$

F3. (Határozott integrál.) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$,

(*b*) $\displaystyle\int_1^3 x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$,

(*c*) $\displaystyle\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x$,

(*d*) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$,

(*e*) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Megoldás [F3].

(*a*) $$\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{15}\sqrt{(5x+4)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{15}\left(\sqrt{9}^3 - \sqrt{4}^3\right) = \frac{2\,(27-8)}{15} = \frac{38}{15}.$$

(*b*) $$\int_1^3 x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_1^3 = \left[\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}\right]_1^3 =$$
$$= \frac{1}{4}(\sqrt[3]{(1+27)^4} - \sqrt[3]{(1+1)^4}) = \frac{28^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}}{4}.$$

(c) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c$, ezért

$$\int_1^4 \ln(5x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\Big[(5x-2)\ln(5x-2) - (5x-2)\Big]_1^4 = \frac{1}{5}\left(18\ln(18) - 18 - 3\ln(3) + 3\right) =$$
$$= \frac{18\ln(18) - 3\ln(3) - 15}{5}.$$

(d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(\ln(x))\Big]_1^e = -\cos(1) + \cos(0) = 1 - \cos(1).$

(e) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\,\mathrm{d}x$

$$x = Ax - 2A + Bx - B \;\rightarrow\; A + B = 1,\; -2A - B = 0 \;\rightarrow\; A = -1,\; B = 2,$$

$$\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|x-1| + 2\ln|x-2|\Big]_3^4 = \left[\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right|\right]_3^4 =$$
$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{8}{3}\right).$$