12. Gyakorlat - Megoldások
Integrálszámítás alkalmazásai

F1. (Területszámítás) Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidom területét.

Megoldás [F1]. Metszéspontok $f(x) = g(x)$ helyeken, azaz

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x} \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1 \end{aligned}$$

Tehát a $[0, 1]$ intervallumon kell integrálnunk, itt $\sqrt{x} > x^2$, tehát

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

F2. (Területszámítás) Határozzuk meg az $y = -x^2 + 8x - 9$ és az $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 9$ egyenletű görbék által közrezárt síkidomok területét.

Megoldás [F2]. Metszéspontok

$$\begin{aligned} -x^2 + 8x - 9 &= \frac{x^2}{2} - 4x + 9 \\ 0 &= \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{64^2 - 48}}{2} = 2, 6, \end{aligned}$$

$$\int_2^6 -x^2 + 8x - 9 - \frac{x^2}{2} + 4x - 9 \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3x^3}{6} + 12\frac{x^2}{2} - 18x\right]_2^6 = \left[-\frac{x^3}{2} + 6x^2 - 18x\right]_2^6 =$$

$$= -108 + 216 - 108 + 4 - 24 + 36 = 16.$$

F3. (Hf) Határozzuk meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ egyenletű görbék által közrezárt síkidom területét.

Megoldás [F3]. Metszéspontok

$$
\begin{aligned}
x^4 &= 3x^2 - 2 \\
x^4 - 3x^2 - 2 &= 0 \\
(x^2 - 1)(x^2 - 2) &= 0 \\
x &= \pm 1, \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

A $[-\sqrt{2}, -1]$ és $[1, \sqrt{2}]$ intervallumok feletti síkidomok egybevágóak, mert mindkét függvény páros, továbbá itt $x^4 \leq 3x^2 - 2$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} 3x^2 - 2 - x^4 \,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} 3x^2 - 2 - x^4 \,\mathrm{d}x = \left[x^3 - 2x - \frac{x^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - \left(1 - 2 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{6}{5}.$$

A $[-1, 1]$ intervallum feletti síkidom esetén $x^4 \geq 3x^2 - 2$

$$\int_{-1}^{1} x^4 - 3x^2 + 2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - 1 + 2 - \left(\frac{-1}{5} + 1 - 2\right) = \frac{12}{5}.$$

F4. (Ívhossz) Számítsuk ki az $f(x) = x\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

Megoldás [F4]. $(x\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, így az ívhossz

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\left[\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}(\sqrt{10}^3 - 1).$$

F5. (Hf) Számítsuk ki az $f(x) = \ln(1 - x^2), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ függvény grafikonjának az ívhosszát.

Megoldás [F5]. $(\ln(1 - x^2))' = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$, így az ívhossz

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1 - x^2)^2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-(1 - x^2) + 2}{(1 - x^2)} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{2}{(1 - x^2)} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} -1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \,\mathrm{d}x =$$

$$\Big[- x - \ln|x - 1| + \ln|x + 1| \Big]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 0.$$

F6. (Térfogat) Határozzuk meg az $f(x) = \sin(x), x \in [0, \pi]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Megoldás [F6].

$$\pi \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\Big[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4}\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

F7. (Térfogat) Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 1$ ($x \in [-1, 1]$) függvény megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát.

Megoldás [F7]. A térfogat

$$\pi \int_{-1}^1 (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^1 x^4 + 2x^2 + 1\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^1 = \frac{56\pi}{15}.$$

F8. (Hf) Határozzuk meg az $f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in [1, 3]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Megoldás [F8]. A térfogat

$$\pi \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^3 x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\Big[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\Big]_1^3 = \pi\left(9 - 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2 + 1\right) = \frac{16}{3}\pi.$$

F9. (Felszín) Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0, 1]$) függvény megforgatásával keletkezett forgási paraboloid felszínét.

Megoldás [F9]. A felszín, ha $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[2\frac{\sqrt{(x+1/4)^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$