Matematika A1 vizsg GTK PSz&NG MEGOLDÁSOK 2023.12.20.

1.) 3+4p

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2+3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4x+1}{x^2+3x+1}="\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}=\frac{4}{1}=4$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg(3x)}{2x}="\frac{0}{0}"=\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}^{\to 1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\cos(3x)}_{\to 1}}=1\cdot\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

vagy L'H

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2(3x)}\cdot 3}{2}=\frac{1\cdot 3}{2}=\frac{3}{2}$$

2.) 7p $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\Rightarrow x=\pm 1$ szakadási helyek

$$\lim_{x\to-1+}\frac{2x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to-1+}\frac{\overbrace{2x}^{\to -2}}{\underbrace{x+1}_{\to 0+}}=\frac{-2}{0+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{\overbrace{2x}^{\to -2}}{\underbrace{x+1}_{\to 0-}}=\frac{-2}{0-}=\infty$$

másodfajú (lényeges) szakadás - Pólus $x=-1$-ben

$$\lim_{x\to 1\pm}\frac{\overbrace{2x}^{\to 2}}{\underbrace{x+1}_{\to 2}}=\frac{2}{2}=1$$

„megszüntethető" szakadás $x=1$-ben

3.) 6p $t(x) = x + \frac{100}{x} + 10$ $x \geq 0$ feltétel mellett glob. minimum keresése

$t'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} \Rightarrow t'(x) = 0$ $1 = \frac{100}{x^2}$

$x^2 = 100$ $x_1 = 10$

$x_2 \neq -10$ $(x \geq 0)$

x	$[0,10)$	10	$(10,\infty)$
t'	$-$	0	$+$
t	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$1 - \frac{100}{x^2} < 0$

$x^2 < 100$

$|x| < 10$

globális min. hely $x = 10$-ben

$t(10) = 10 + \frac{100}{10} + 10 = 30$ Összesen 30 percet vesz igénybe a takarítás.

4.) 10p $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$e^x = 1$

$x = 0$

nincs zérushely

nincs paritás

nem periodikus

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to 0} - 1} = -1$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$

vízsz. asz.: $x = -1$ a $-\infty$-ben és $x = 0$ (y-tengely) a ∞-ben

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to 1+} - 1} = \frac{1}{0+} = \infty \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to 1-} - 1} = \frac{1}{0-} = -\infty \quad \text{(pólus)}$$

függ. asz.: $y = 0$ (x-tengely)

$$f'(x) = \frac{-e^x}{\underbrace{(e^x-1)^2}_{\geq 0}} < 0 \; ; \; f'(x) < 0 \; D_f\text{-en} \Rightarrow f \text{ szig. mon. csökkenő}$$

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$-en

$$f''(x) = \frac{-e^x\cancel{(e^x-1)^2} + e^x \cdot 2 \cdot \cancel{(e^x-1)} \cdot e^x}{(e^x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-e^{2x} + e^x + 2e^{2x}}{(e^x-1)^3} = \frac{\overset{>0}{e^{2x}} + \overset{>0}{e^x}}{(e^x-1)^3}$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$

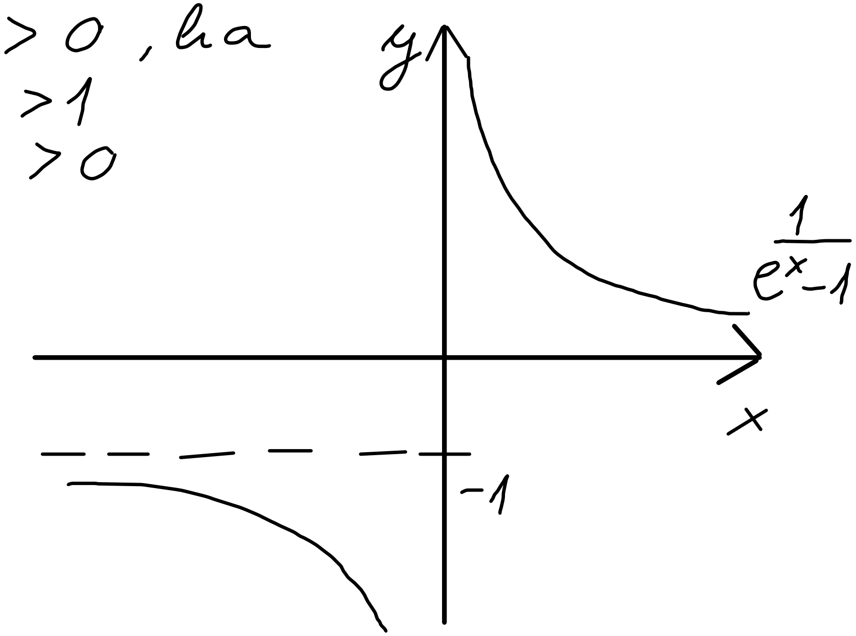
$e^{2x} + e^x > 0$

$e^x - 1 > 0$, ha

$e^x > 1$

$x > 0$

R_f: $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$



5.) 8p

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x-8}\,dx \qquad x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$$

$$\frac{x+1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-4B}{(x-4)(x+2)} \qquad \begin{aligned} A+B&=1 \\ 2A-4B&=1 \end{aligned}$$

$$B=\frac{1}{6} \quad A=\frac{5}{6}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x-8}\,dx = \frac{5}{6}\cdot\int\frac{1}{x-4}\,dx + \frac{1}{6}\cdot\int\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{5}{6}\ln|x-4| + \frac{1}{6}\ln|x+2| + C$$

6.) 7p

$$-x^2+4 = 2-x$$

$$0 = x^2-x-2 = (x+1)(x-2) \quad x_{1,2} = -1;2$$

$$T=\int_{-1}^{2} -x^2+4-(2-x)\,dx = \int_{-1}^{2} -x^2+4-2+x\,dx = \int_{-1}^{2} -x^2+x+2\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) =$$

$$= -\frac{9}{3}+\frac{3}{2}+6 = 4{,}5$$