GTK NG&PSz A1 vizsga - MINTA MEGOLDÁSOK

1.) Keressük meg az összes valós gyökét az alábbi polinomnak!

$$p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x$$

(7 pont)

Megoldás - 1.)

A polinomból kiemelve $2x$-et $p(x) = 2x(x^3 + x^2 - 4x + 2)$, tehát $x_1 = 0$ gyöke a polinomnak. (1 pont)
Ekkor a köbös polinom egész gyökei lehetnek: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. $x = 1$-et behelyettesítve $1^3 + 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 0$. Tehát az $x - 1$ is kiemelhető a polinomból, $x_2 = 1$ is gyöke a polinomnak. (2 pont)
Polinomosztással

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & + & x^2 & - & 4x & + & 2 & : x - 1 = x^2 + 2x - 2 \\
x^3 & - & x^2 & & & & & \\
\hline
& & 2x^2 & - & 4x & + & 2 & \\
& & 2x^2 & - & 2x & & & \\
\hline
& & & - & 2x & + & 2 & \\
& & & - & 2x & + & 2 & \\
\hline
& & & & & & 0 &
\end{array}$$

(2 pont)

Az $x^2 + 2x - 2$ polinom további gyökei

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

(2 pont)

2.) Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét!

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n+1}$$

(4+3 pont)

Megoldás - 2.)

$a)$ A rendőr elv alapján

$$3\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \sqrt[n]{3^n - \frac{3^n}{2}} \underset{\frac{3^n}{2} > 2^n,\text{ ha } n>1}{<} \sqrt[n]{3^n - 2^n} < \sqrt[n]{3^n} = 3$$

$$n \to \infty: \quad 3 \qquad\qquad 3 \qquad\qquad 3$$

(2+2 pont)

$$b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{3n+1}{n}} = (e^{-2})^{\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n}} = e^{-6}.$$

(2+1 pont)

3.) Írja fel az $f(x) = \text{arctg}(2x)$ függvény $x_0 = 1/2$ pontbeli érintőjét! (6 pont)

Megoldás - 3.)

A függvényérték $\text{arctg}\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. (1 pont)

$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$, $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. (2+1 pont)

Az érintő egyenlete $y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. (2 pont)

4.) Végezze el az $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát! (10 pont)

Megoldás - 4.)

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. (1 pont)
- nincs spec.tul.
- zh.:$\{0, 2\}$ (1 pont)
- $\lim\limits_{x\to 1\pm} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{0\pm} = \mp\infty$, $\quad$ pólus, $x = 1$ $\quad$ függ.asz.

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} = \pm\infty$

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$,

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} - x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$,

  ferde aszimptóta $y = x - 1$ a $\pm\infty$-ben

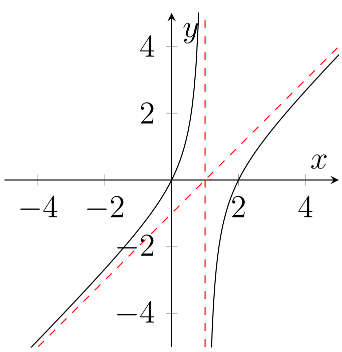
  (3 pont)

- $f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} =$

  $= \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} > 0$, $(-\infty, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon is monoton növő. (2 pont)

- $f''(x) = \left(\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{-2}{(x-1)^3}$, azaz $(-\infty, 1)$-on konvex, a $(1, \infty)$-on konkáv.

  (2 pont)

- 

- $R_f = \mathbb{R}$ (1 pont)

5.) Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$a) \int xe^{-x}\,dx \qquad b) \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

(4+4 pont)

Megoldás - 5.)

$$a) \int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$ (4 pont)

$$b) \int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$ (4 pont)

6.) Számítsa ki az $f(x) = e^{-x} + 1$ függvény $x \in [0,1]$ darabjának x-tengely körüli megforgatásával létrejött forgástest térfogatát! (7 pont)

Megoldás - 6.)

$$V = \int_0^1 \pi(e^{-x}+1)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 e^{-2x} + 2e^{-x} + 1\,\mathrm{d}x =$$ (3 pont)

$$= \pi\left[\frac{e^{-2x}}{-2} - 2e^{-x} + x\right]_0^1 =$$

(2 pont)

$$= \pi\left(\left(\frac{-1}{2e^2} - \frac{2}{e} + 1\right) - \left(\frac{-1}{2} - 2 + 0\right)\right) = \pi\left(\frac{-1}{2e^2} - \frac{2}{e} + \frac{7}{2}\right)$$

(2 pont)