A1 MINTA(A) 1. zárthelyi - MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

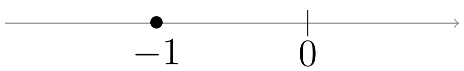
1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenletet, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$x + 3 = \sqrt{x+5}$$

Megoldás. A gyökvonás miatt $x + 5 \geq 0$, azaz $x \geq -5$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk (fel kellene tennünk, hogy $x + 3 > 0$, azaz $x > -3$):

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x+5 \\ x^2+6x+9 &= x+5 \qquad / - x - 5 \\ x^2+5x+4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = -1, -4.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy
$-1 + 3 = 2 = \sqrt{-1+5} = \sqrt{4}$ az $x = -1$ a helyes megoldás,
$-4 + 3 = -1 \neq \sqrt{-4+5} = \sqrt{1} = 1$ az $x = -4$ nem megoldás.



2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel gyöktényezős alakban!

$$x^4 - x^3 - 18x^2 - 13x + 15$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 15 osztói lehetnek.
$(-3)^4 - (-3)^3 - 18(-3)^2 - 13(-3) + 15 = 0,$ tehát az $x_1 = -3$ gyök.
továbbá $(5)^4 - (5)^3 - 18(5)^2 - 13(5) + 15 = 0,$ tehát az $x_2 = 5$ is gyök.
Mivel $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x^4 & - & x^3 & - & 18x^2 & - & 13x & + & 15 \quad : (x^2-2x-15) = (x^2+x-1) \\
x^4 & - & 2x^3 & - & 15x^2 & & & & \\ \hline
 & & x^3 & - & 3x^2 & - & 13x & + & 15 \\
 & & x^3 & - & 2x^2 & - & 15x & & \\ \hline
 & & & - & x^2 & + & 2x & + & 15 \\
 & & & - & x^2 & + & 2x & + & 15 \\ \hline
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Keressük meg a $x^2 + x - 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A gyöktényezős alak

$$(x+3)(x-5)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x) = 2^{x+3} - 7$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben, mivel a 2^x szigorúan monoton növekvő:

$$\begin{aligned} 2^{x_1+3} - 7 &= 2^{x_2+3} - 7 \\ 2^{x_1+3} &= 2^{x_2+3} \\ x_1 + 3 &= x_2 + 3 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned} 2^{x+3} - 7 &= y \\ 2^{x+3} &= y + 7 \\ x + 3 &= \log_2(y+7) \qquad \text{ha } y + 7 > 0. \\ x &= \log_2(y+7) - 3, \qquad \text{ha } y > -7. \end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \log_2(x+7) - 3, \quad x \in (-7, \infty)$.

4. Vizsgálja meg a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \frac{n+1}{2n^2 - 1}$$

Megoldás. A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{2n - \frac{1}{n}} = \dfrac{1+0}{\infty - 0} = 0.$

Vizsgálva a monotonitást:

$$\begin{aligned} a_n &\gtrless a_{n+1} \\ \frac{n+1}{2n^2-1} &\gtrless \frac{n+2}{2(n+1)^2 - 1} \\ \frac{n+1}{2n^2-1} &\gtrless \frac{n+2}{2n^2 + 4n + 1} \\ 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1 &\gtrless 2n^3 + 4n^2 - n - 2 \\ 2n^2 + 6n + 3 &> 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.} \end{aligned}$$

Felülről korlátos, a legkisebb felső korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = \dfrac{2}{2-1} = 2$. Legnagyobb alsó korlátja a határérték, azaz 0.