A1 MINTA(B) 1. zárthelyi - MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

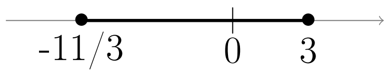
1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$\left|1+\frac{3x-4}{5}\right| \leq 2$$

Megoldás. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 2, ha a szám -2 és 2 között van:

$$\begin{aligned}
-2 \leq 1+\frac{3x-4}{5} &\leq 2 \\
-3 \leq \frac{3x-4}{5} &\leq 1 \\
-15 \leq 3x-4 &\leq 5 \\
-11 \leq 3x &\leq 9 \\
-11/3 \leq x &\leq 3
\end{aligned}$$

tehát a megoldás: $x \in [-11/3, 3]$.



2. Végezze el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$ és $q(x) = x^2 + 1$. Ellenőrizze az osztás helyességét is!

Megoldás.

$$\begin{array}{ccccccccl}
x^4 & + & 2x^3 & - & x^2 & & & + & 4 \quad : (x^2+1) = (x^2+2x-2) \\
x^4 & & & + & x^2 & & & & \\
\hline
 & & 2x^3 & - & 2x^2 & & & + & 4 \\
 & & 2x^3 & & & + & 2x & & \\
\hline
 & & & - & 2x^2 & - & 2x & + & 4 \\
 & & & - & 2x^2 & & & - & 2 \\
\hline
 & & & & & - & 2x & + & 6
\end{array}$$

Azaz

$$(x^2+1)(x^2+2x-2) + (-2x+6) = (x^4 + x^2 + 2x^3 + 2x - 2x^2 - 2) + (-2x+6) =$$

$$= (x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2) - 2x + 6 = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4.$$

3. Adja meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\ln(2x-1)}{\sqrt{3-x}}.$$

Megoldás. Az $\ln(x)$ függvény a pozitív számokon értelmezett, tehát $2x-1>0$, azaz $x>1/2$. A gyökjel alá csak nem negatív szám írható, így $3-x\geq 0$, $3\geq x$. Továbbá 0-val nem oszthatunk, $3-x\neq 0$, $x\neq 3$. E három feltételből adódik, hogy $x\in(0.5,3)=D_f$.

4. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\qquad\qquad \text{b)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x}$$

Megoldás.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{\text{"}0\text{"}}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-5}{x+2}\right)^{x+2}\right)^{\dfrac{2x}{x+2}}=$$

$$=(e^{-5})^{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+\frac{2}{x}}}=(e^{-5})^{\dfrac{2}{1+0}}=(e^{-5})^2=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}},$$

vagy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\left(1+\frac{2}{2}\right)}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{2}\right)^x}\right)^2=\left(\frac{e^{-3}}{e^2}\right)^2=e^{-10}.$$