

A1 MINTA(A) 1. zárthelyi - MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg \mathbb{R} -en a következő egyenletet, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$x + 3 = \sqrt{x + 5}$$

Megoldás. A gyökvonás miatt $x + 5 \geq 0$, azaz $x \geq -5$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk (fel kellene tennünk, hogy $x + 3 > 0$, azaz $x > -3$):

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x + 5 \\ x^2 + 6x + 9 &= x + 5 \quad / -x - 5 \\ x^2 + 5x + 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = -1, -4.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy
 $-1 + 3 = 2 = \sqrt{-1 + 5} = \sqrt{4}$ az $x = -1$ a helyes megoldás,
 $-4 + 3 = -1 \neq \sqrt{-4 + 5} = \sqrt{1} = 1$ az $x = -4$ nem megoldás.

2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel gyöktényezős alakban!

$$x^4 - x^3 - 18x^2 - 13x + 15$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 15 osztói lehetnek.

$(-3)^4 - (-3)^3 - 18(-3)^2 - 13(-3) + 15 = 0$, tehát az $x_1 = -3$ gyök.

továbbá $(5)^4 - (5)^3 - 18(5)^2 - 13(5) + 15 = 0$, tehát az $x_2 = 5$ is gyök.

Mivel $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 18x^2 - 13x + 15 : (x^2 - 2x - 15) = (x^2 + x - 1) \\ x^4 - 2x^3 - 15x^2 \\ \hline x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \\ x^3 - 2x^2 - 15x \\ \hline -x^2 + 2x + 15 \\ -x^2 + 2x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Keressük meg a $x^2 + x - 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A gyöktényezős alak

$$(x + 3)(x - 5) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x) = 2^{x+3} - 7$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben, mivel a 2^x szigorúan monoton növekvő:

$$2^{x_1+3} - 7 = 2^{x_2+3} - 7$$

$$2^{x_1+3} = 2^{x_2+3}$$

$$x_1 + 3 = x_2 + 3$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x .

$$2^{x+3} - 7 = y$$

$$2^{x+3} = y + 7$$

$$x + 3 = \log_2(y + 7) \quad \text{ha } y + 7 > 0.$$

$$x = \log_2(y + 7) - 3, \quad \text{ha } y > -7.$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \log_2(x + 7) - 3, \quad x \in (-7, \infty)$.

4. Vizsgálja meg a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \frac{n + 1}{2n^2 - 1}$$

Megoldás. A határérték $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2n - \frac{1}{n}} = \frac{1 + 0}{\infty - 0} = 0$.

Vizsgálva a monotonitást:

$$a_n \stackrel{>}{<} a_{n+1}$$

$$\frac{n + 1}{2n^2 - 1} \stackrel{>}{<} \frac{n + 2}{2(n + 1)^2 - 1}$$

$$\frac{n + 1}{2n^2 - 1} \stackrel{>}{<} \frac{n + 2}{2n^2 + 4n + 1}$$

$$2n^3 + 6n^2 + 5n + 1 \stackrel{>}{<} 2n^3 + 4n^2 - n - 2$$

$$2n^2 + 6n + 3 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.}$$

Felülről korlátos, a legkisebb felső korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = \frac{2}{2 - 1} = 2$. Legnagyobb alsó korlátja a határérték, azaz 0.