A1 1. zárthelyi (A) MEGOLDÁS 2023. október 11.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenletet!

$$x - 2 = \sqrt{2x - 1}$$

Megoldás. A gyökvonás miatt $2x - 1 \geq 0$, azaz $x \geq 1/2$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 2x - 1\\ x^2 - 4x + 4 &= 2x - 1\\ x^2 - 6x + 5 &= 0\\ x &= 1 \text{ ill. } 5\end{aligned}$$

(3 pont)

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe

$$\begin{aligned}1 - 2 = -1 &\neq \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = \sqrt{1} = 1\\ 5 - 2 = 3 &= \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

(1 pont)

azt kapjuk, hogy az $x = 5$ a helyes megoldás, az $x = 1$ nem megoldás. (1 pont)

2. Keresse meg a polinom egész gyökeit, és írja fel elsőfokú tényezők szorzataként!

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 3 osztói lehetnek.
$2 \cdot (1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 0,$ tehát az $x_1 = 1$ gyök. (1 pont)
Mivel $(x - 1)$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
(2x^3 & + & 3x^2 & - & 8x & + & 3) & : (x-1) = (2x^2 + 5x - 3)\\
2x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 8x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 5x & & & \\
\hline
 & & & - & 3x & + & 3 & \\
 & & & - & 3x & + & 3 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

(2 pont)

Keressük meg a $2x^2 + 5x - 3$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \\ -3. \end{cases}$$

(1 pont)

A szorzatalak

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)(x-1)$$

$$\text{vagy} \qquad (2x-1)(x+3)(x-1).$$

(1 pont)

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x)=\log_2(x+3)-1, \qquad x>-3$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1)=f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1=x_2$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned} \log_2(x_1+3)-1 &= \log_2(x_2+3)-1 \\ \log_2(x_1+3) &= \log_2(x_2+3) \quad \text{mivel a } \log_2(x+3) \text{ szig.mon. növő } x>-3\text{-ra} \\ x_1+3 &= x_2+3 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. (2 pont)

Ha $f(x)=y$, akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned} \log_2(x+3)-1 &= y \\ \log_2(x+3) &= y+1 \\ x+3 &= 2^{y+1} \\ x &= 2^{y+1}-3. \end{aligned}$$

(2 pont)

Így az inverz $f^{-1}(x)=2^{x+1}-3$, minden $x\in\mathbb{R}$. (1 pont)

4. Számítsa ki a határértéket az ismert határértékek felhasználásával!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1} = \text{"}\infty-\infty\text{"} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+1})\cdot\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}} =$$

(2 pont)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n-3-n-1}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}} = \frac{\text{"}-4\text{"}}{\infty} = 0.$$

(3 pont)