A1 1. zárthelyi (B) MEGOLDÁS 2023. október 11.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenletet!

$$x - 1 = \sqrt{2x+1}$$

Megoldás. A gyökvonás miatt $2x+1 \geq 0$, azaz $x \geq -1/2$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= 2x+1 \\
x^2 - 2x + 1 &= 2x+1 \\
x^2 - 4x &= 0 \\
x &= 0 \text{ ill. } 4
\end{aligned}$$

(3 pont)

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe

$$\begin{aligned}
0 - 1 = -1 \neq \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = \sqrt{1} = 1 \\
4 - 1 = 3 = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = \sqrt{9} = 3
\end{aligned}$$

(1 pont)

azt kapjuk, hogy az $x = 4$ a helyes megoldás, az $x = 0$ nem megoldás. (1 pont)

2. Keresse meg a polinom egész gyökeit, és írja fel elsőfokú tényezők szorzataként!

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 3 osztói lehetnek.
$2 \cdot (-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 3 = 0,$ tehát az $x_1 = -1$ gyök. (1 pont)
Mivel $(x+1)$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(2x^3 & - & 5x^2 & - & 4x & + & 3) & : (x+1) = (2x^2 - 7x + 3) \\
2x^3 & + & 2x^2 & & & & & \\
\hline
& - & 7x^2 & - & 4x & + & 3 & \\
& - & 7x^2 & - & 7x & & & \\
\hline
& & & & 3x & + & 3 & \\
& & & & 3x & + & 3 & \\
\hline
& & & & & & 0 &
\end{array}$$

(2 pont)

Keressük meg a $2x^2 - 7x + 3$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} 3, \\ \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(1 pont)

A szorzatalak

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)(x+1)$$

$$\text{vagy} \qquad (2x-1)(x-3)(x+1)$$

(1 pont)

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x)=\log_3(x+2)-1, \qquad x>-2$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1)=f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1=x_2$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
\log_3(x_1+2)-1 &= \log_3(x_2+2)-1\\
\log_3(x_1+2) &= \log_3(x_2+2) \qquad \text{mivel a } \log_3(x+2) \text{ szig.mon. növő } x>-2\text{-re}\\
x_1+2 &= x_2+2\\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. (2 pont)

Ha $f(x)=y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned}
\log_3(x+2)-1 &= y\\
\log_3(x+2) &= y+1\\
x+2 &= 3^{y+1}\\
x &= 3^{y+1}-2.
\end{aligned}$$

(2 pont)

Így az inverz $f^{-1}(x)=3^{x+1}-2$, minden $x\in\mathbb{R}$. (1 pont)

4. Számítsa ki a határértéket az ismert határértékek felhasználásával!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1} = \text{"}\infty-\infty\text{"} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} =$$

(2 pont)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n+1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} = \frac{\text{"}4\text{"}}{\infty} = 0.$$

(3 pont)