A1 2. zárthelyi (A) MEGOLDÁS 2023. november 22.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+x^2}{1-x} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2+1}$$

(5 pont)

Megoldás.

a) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+x^2}{1-x} = \frac{\text{"}-\infty+\infty\text{"}}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+x}{\frac{1}{x}-1} = \frac{2-\infty}{0-1} = \infty.$ (2 pont)

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4x^2} = \frac{2}{\infty} = 0.$ (3 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = (x^2+1)e^x + e^{2x}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(0) = (0^2+1)e^0 + e^0 = 1\cdot 1 + 1 = 2.$ (1 pont)

$f'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x + e^{2x}\cdot 2.$ (1 pont)

$f'(0) = 0 + (0^2+1)\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = 3(x-0) + 2 = 3x + 2.$$

(2 pont)

3. A boltban kiárusítják a 100 forintos csokikat. Ha x százalék kedvezménnyel adják, akkor $60+3x$ darabot tudnak eladni. Mekkora kedvezményt adjanak, hogy a lehető legtöbb legyen a bevétel? Mennyi lesz a bevétel maximuma? (5 pont)

Megoldás. Az eladásból keletkezett hasznunk

$$h(x) = 100\cdot\frac{(100-x)}{100}\cdot(60+3x) = (100-x)(60+3x) = -3x^2 + 240x + 6000,$$

ahol $x \in (0, 100)$ lehet. (2 pont)
Ekkor keresve a $h(x)$ adott intervallumon vett globális maximumát

$$h'(x) = 240 - 6x.$$

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyeit $240 - 6x = 0$, ha $x = 40$. (1 pont)

x	$(0, 40)$	40	$(40, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Azaz $x = 40$ százaléknál globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, (1 pont)
értéke itt $60(60 + 120) = 10800$. (1 pont)

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját

$$f''(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)'' = \left(\frac{2x(x^2+3) - x^2(2x)}{(x^2+3)^2}\right)' = \left(\frac{2x^3 + 6x - 2x^3}{(x^2+3)^2}\right)' = \left(\frac{6x}{(x^2+3)^2}\right)' =$$

$$= \frac{6(x^2+3)^2 - 6x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{6x^2 + 18 - 24x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}.$$

(2 pont)

Ennek zérushelyei az $-18x^2 + 18 = 0$ egyenlet megoldásai, azaz $x_{1,2} = \pm 1$-nél vannak.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	infl.	$\smile$	infl.	$\frown$

Mivel a számláló $x < -1$-re és $x > 1$-re negatív (a nevező mindenhol pozitív), így ott konkáv a függvénygrafikon. $-1 < x < 1$ esetén a derivált pozitív, így ott konvex a függvény. Az $x = \pm 1$ helyeken inflexiós pontja van a függvénynek. (3 pont)