A1 2. zárthelyi (B) MEGOLDÁS 2023. november 22.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-x^2}{1+x} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+2x}$$

(5 pont)

Megoldás.

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-x^2}{1+x} = \frac{\text{"}-\infty-\infty\text{"}}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{\frac{1}{x}+1} = \frac{2-(-\infty)}{0+1} = \infty.$$ (2 pont)

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2+2x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$ (3 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = x^2 \cdot e^x + \frac{e^{2x}}{2}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(0) = 0^2 \cdot e^0 + \frac{e^0}{2} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$ (1 pont)

$f'(x) = 2xe^x + x^2\, e^x + \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2.$ (1 pont)

$f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = 1(x-0) + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}.$$

(2 pont)

3. A boltban kiárusítják a 100 forintos csokikat. Ha x százalék kedvezménnyel adják, akkor $80 + 4x$ darabot tudnak eladni. Mekkora kedvezményt adjanak, hogy a lehető legtöbb legyen a bevétel? Mennyi lesz a bevétel maximuma? (5 pont)

Megoldás. Az eladásból keletkezett hasznunk

$$h(x) = 100 \cdot \frac{(100-x)}{100} \cdot (80+4x) = (100-x)(80+4x) = -4x^2 + 320x + 8000,$$

ahol $x \in (0, 100)$ lehet. (2 pont)
Ekkor keresve a $h(x)$ adott intervallumon vett globális maximumát

$$h'(x) = 320 - 8x.$$

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyeit $320 - 8x = 0$, ha $x = 40$. (1 pont)

x	$(0, 40)$	40	$(40, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Azaz $x = 40$ százaléknál globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, (1 pont)
értéke itt $60(80 + 160) = 14400$. (1 pont)

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját (1 pont)

$$f''(x) = \left(\frac{x^2}{x+3}\right)'' = \left(\frac{2x(x+3) - x^2 \cdot 1}{(x+3)^2}\right)' = \left(\frac{2x^2 + 6x - x^2}{(x+3)^2}\right)' = \left(\frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2+6x) \cdot 2(x+3) \cdot 1}{(x+3)^4} = \frac{2x^2 + 12x + 18 - 2x^2 - 12x}{(x+3)^3} = \frac{18}{(x+3)^3}.$$

(2 pont)

Ennek a törtnek nincs zérushelye, ezért

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, \infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$

Mivel a nevező $x < -3$-ra negatív (a számláló mindenhol pozitív), így ott konkáv a függvénygrafikon. $-3 < x$ esetén a derivált pozitív, így ott konvex a függvény. Inflexiós pontja nincs a függvénynek. (2 pont)