A1 1. zárthelyi pótlása - MEGOLDÁSOK 2023. december 5.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Vázlatosan ábrázoljuk azon pontok mértani helyét a síkon, melyekre az alábbi egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek

$$x^2 + y^2 - 1 < 3 \qquad \text{és} \qquad y < x^2 + 1.$$

(5 pont)

Megoldás. Az első egyenlőtlenséget átrendezve:

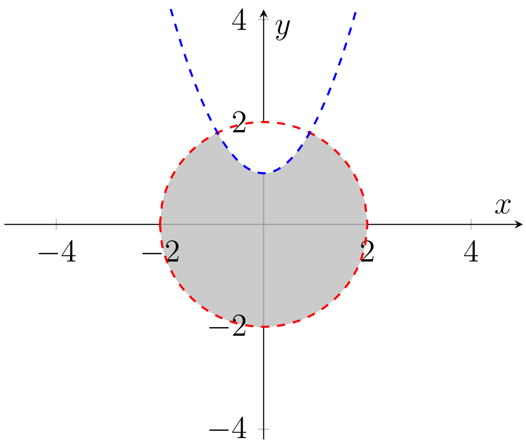
$$x^2 + y^2 < 4$$

ami egy origó középpontú, 2 sugarú kör belseje. (2 pont)

A második egyenlőtlenségnél először csak a határgörbét tekintsük:

$$y = x^2 + 1.$$

Ez egy parabola, melynek szimmetriatengelye az $x = -0/(2\cdot 1) = 0$ azaz az y-tengely. Csúcspontja az $x = 0$ behelyettesítésével adódik $(0, 1)$. A parabola alatti pontok az egyenlőtlenséget kielégítő pontok. (2 pont)



(1 pont)

2. Végezzük el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = x^4 - 3x^3 - 5x + 1$ és $q(x) = x^2 + x + 1$. Ellenőrizzük az osztás helyességét is! (5 pont)

Megoldás.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
(x^4 & - & 3x^3 & & & - & 5x & + & 1) \quad : (x^2+x+1) = x^2 - 4x + 3 \\
x^4 & + & x^3 & + & x^2 & & & & \\
\hline
& - & 4x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 1 \\
& - & 4x^3 & - & 4x^2 & - & 4x & & \\
\hline
& & & & 3x^2 & - & x & + & 1 \\
& & & & 3x^2 & + & 3x & + & 3 \\
\hline
& & & & & - & 4x & - & 2
\end{array}$$

(3 pont)

Ellenőrzés:

$$(x^2+x+1)(x^2-4x+3)-4x-2 = x^4+x^3+x^2-4x^3-4x^2-4x+3x^2+3x+3-4x-2 = x^4-3x^3-5x+1.$$

(2 pont)

3. Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\sqrt{\frac{6}{2x+5}} \cdot \ln(x^2-1).$$

(5 pont)

Megoldás. A tört, $\frac{6}{2x+5}$, akkor értelmezhető, ha $2x+5 \neq 0$. Továbbá a tört értéke nem lehet negatív, hiszen gyököt vonunk belőle. Mivel a számláló pozitív, ezért a nevezőnek is pozitívnak kell lennie, így

$$2x+5 > 0, \text{ azaz } x > -\frac{5}{2} = -2,5.$$

(2 pont)

A logaritmus függvény csak pozitív számokra értelmezett, ezért

$$x^2-1 > 0, \text{ azaz } |x| > 1 \quad \longrightarrow \quad x > 1 \text{ vagy } x < -1.$$

(2 pont)

A két halmaz közös részén értelmezett a függvény, így

$$x \in (-2,5,-1) \cup (1,\infty).$$

(1 pont)

4. Számítsuk ki a sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+5}\right)^{2n+1}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+5}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^1 = \left(\frac{e^{-1}}{e^5}\right)^2 \cdot 1 = e^{-12}.$$

(5 pont)