A1 2. zárthelyi pótlása - MEGOLDÁSOK 2023. december 5.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki a következő határértékeket!

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(2x)}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{"\infty"}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}}{1} = \frac{\sqrt{0+1}-0}{1} = 1.$$

(2 pont)

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(2x)} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2\sin(2x)} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{2}{4\cos(2x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

vagy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2(x)} \underset{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}{=} \frac{1}{2} \cdot 1^2.$$

(3 pont)

2. Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}, \\ 0, & \text{ha } x = 1,\ x = 3. \end{cases}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4x+3} = \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)}$.

A nevező zérushelyeiben a tört nem értelmezett, ezek lehetnek a függvény szakadási helyei.

(1 pont)

Ha $x = 3$, $\quad \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{"0"}{0} = \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Ugyanígy adódik $\lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Tehát a két féloldali határérték létezik, és értékük megegyezik, de nem egyeznek meg a függvényértékkel ($f(3) = 0$). Így a függvénynek megszűntethető szakadása van az $x = 3$ helyen. (2 pont)

Ha $x = 1$, $\quad \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{-2}{(0+)\cdot -2} = \infty$.

Ugyanígy adódik $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{-2}{(0-)\cdot -2} = -\infty$

Tehát a két féloldali határérték ∞ ill. $-\infty$, így a szakadás lényeges (másodfajú), a függvénynek pólusa van az $x = 1$ helyen. (2 pont)

3. Írjuk fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = (x+3) \cdot \mathrm{tg}(2x) + e^{2x}$$

(5 pont)

Megoldás.
$f(0) = (0+3) \cdot \mathrm{tg}(0) + e^0 = 3 \cdot 0 + 1 = 1.$ (1 pont)

$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{tg}(2x) + (x+3)\dfrac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 + 2e^{2x}.$ (2 pont)

$f'(0) = 1 \cdot 0 + (0+3) \cdot \frac{1}{1^2} \cdot 2 + 2e^0 = 0 + 6 + 2 = 8.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = 8(x-0) + 1 = 8x + 1.$$

(1 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait és lokális szélsőérték helyeit!

$$f(x) = x \cdot e^{-2x}$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x}(1-2x).$ (2 pont)

A derivált nulla lesz, ha $1 - 2x = 0$, azaz $x = \frac{1}{2}$-nél van zérushelye. Mivel $e^{-2x} > 0$ minden x esetén, ezért, ha $1 - 2x < 0$, azaz $x > \frac{1}{2}$ akkor $f'(x) < 0$, a függvény szig. mon. csökken. Ha $x < \frac{1}{2}$, akkor a derivált pozitív, a függvény szig. mon. növő.

x	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

(3 pont)

A lokális maximum értéke $\dfrac{1}{2e}$.