A1 1. zárthelyi (A) MEGOLDÁS 2024. október 9.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

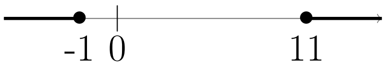
$$\left|\frac{5-x}{3}\right| \geq 2$$

Megoldás. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legalább 2, ha a szám -2-nél nem nagyobb vagy 2-nél nem kisebb:

$$\begin{aligned} \frac{5-x}{3} &\leq -2 \\ 5-x &\leq -6 \\ 11 &\leq x \end{aligned} \qquad \text{vagy} \qquad \begin{aligned} \frac{5-x}{3} &\geq 2 \\ 5-x &\geq 6 \\ -1 &\geq x \end{aligned}$$

(3 pont)

tehát a megoldás: $x \in (-\infty, -1] \cup [11, \infty)$. (1 pont)



(1 pont)

2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel gyöktényezős szorzatalakban!

$$p(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 2 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 2$
$(-2)^3 - (-2)^2 - 5(-2) + 2 = -8 - 4 + 10 + 2 = 0$, tehát az $x_1 = -2$ gyök. (1 pont)
Mivel $(x+2)$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrr} (x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 2) \; : (x+2) = (x^2 - 3x + 1) \\ x^3 & + & 2x^2 & & & & \\ \hline & & -3x^2 & - & 5x & + & 2 \\ & & -3x^2 & - & 6x & & \\ \hline & & & & x & + & 2 \\ & & & & x & + & 2 \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}$$

(2 pont)

Keressük meg a $x^2 - 3x + 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(1 pont)

A szorzatalak:

$$p(x) = (x+2)\left(x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

(1 pont)

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x) = \sqrt[3]{2x-4}$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2x_1-4} &= \sqrt[3]{2x_2-4} \qquad \text{mivel a } \sqrt[3]{2x-4} \text{ szig.mon.növő } \mathbb{R}\text{-en} \\ 2x_1 - 4 &= 2x_2 - 4 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. (2 pont)

Ha $f(x) = y$, akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2x-4} &= y \\ 2x-4 &= y^3 \\ 2x &= y^3+4 \\ x &= \frac{1}{2}y^3+2. \end{aligned}$$

(2 pont)

Így az inverz $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$, minden $x \in \mathbb{R}$. (1 pont)

4. Vizsgálja meg a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2$$

Megoldás. A határérték: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(\frac{1+0}{2-0}\right)^2 = \frac{1}{4}.$ (1 pont)

$\Bigg($vagy másképpen: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2-4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{4-0+0} = \frac{1}{4}.\Bigg)$

Vizsgálva a monotonitást:

$$\begin{aligned} a_n &\gtrless a_{n+1} \\ \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 &\gtrless \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^2 \qquad \text{mivel } a_n > 0 \\ \frac{n+1}{2n-1} &\gtrless \frac{n+2}{2n+1} \\ 2n^2+3n+1 &\gtrless 2n^2+3n-2 \\ 1 &> -2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát a sorozat monoton csökkenő.} \end{aligned}$$

(2 pont)

A sorozat korlátos. A legkisebb felső korlátja a monotonitás miatt az első elem $a_1 = \left(\frac{2}{2-1}\right)^2 = 4.$ Legnagyobb alsó korlátja a határérték, azaz $\frac{1}{4}$. (2 pont)