

A1 2. zárthelyi (A) MEGOLDÁS

2024. november 20.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \frac{x-1}{2x^2+4x-6}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(x) = \frac{x-1}{2x^2+4x-6} = \frac{x-1}{2(x-1)(x+3)}$.

A nevező zérushelyeiben a függvény nem értelmezett: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, ezek a függvény szakadási helyei. (1 pont)

Ha $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x-1}{2(x-1)(x+3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

Tehát a két féloldali határérték létezik, és értékük megegyezik. Így a függvénynek hízagpontja (megszüntethető szakadása) van az $x = 1$ helyen. (2 pont)

Ha $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-1}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{2(x+3)} = \frac{1}{2 \cdot 0^+} = \infty \text{ és}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-1}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{2(x+3)} = \frac{1}{2 \cdot 0^-} = -\infty$$

Tehát a két féloldali határérték $\pm\infty$ a szakadás másodfajú, a függvénynek pólusa van az $x = -3$ helyen. (2 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 1$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}} \cdot \ln(2x-1)$$

(5 pont)

Megoldás. $f(1) = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \ln(2-1) = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \ln(1) = 0$. (1 pont)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot \ln(2x-1) + \sqrt{\frac{x}{3}} \cdot \frac{2}{2x-1}$$
 (1 pont)

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln(1) + \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
 (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1) + 0 = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2 pont)

3. Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = \frac{1 + x - 2x^2}{x + 1}$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(1 - 4x)(x + 1) - (1 + x - 2x^2)}{(x + 1)^2} = \frac{-4x^2 - 3x + 1 - 1 - x + 2x^2}{(x + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x + 1)^2} = \frac{-2x(x + 2)}{(x + 1)^2}.$$

(1 pont)

A deriváltnak zérushelye van, ha $-2x(x + 2) = 0$, azaz $x = 0$ és $x = -2$ esetén. A nevező értéke mindig pozitív, így ha $x > 0$ vagy $x < -2$, akkor a derivált negatív, tehát a függvény szig. mon. csökken. Ha $-2 < x < 0$, akkor a derivált pozitív, a függvény szig. mon. nő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	\searrow	lok.min.	\nearrow	\nearrow	lok.max.	\searrow

(3 pont)

A lokális minimum értéke $x = -2$ -ben $f(-2) = 9$, míg a lokális maximum értéke $x = 0$ -ban $f(0) = 1$.

(1 pont)

4. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértéket. Azt is állapítsa meg, milyen típusú kritikus határértékről van szó.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-3x} \cdot (x - 1)^2$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-3x} \cdot (x - 1)^2 = "0 \cdot \infty" = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)^2}{e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \text{L'H}$$

(2 pont)

$$\rightsquigarrow \lim_{\text{L'H } x \rightarrow \infty} \frac{2(x - 1)}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{\text{L'H } x \rightarrow \infty} \frac{2}{9e^{3x}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

(3 pont)