A1 2. zárthelyi (B) MEGOLDÁS 2024. november 20.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x-3}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+2x-3} = \dfrac{(-1)(x-1)}{(x-1)(x+3)}$.

A nevező zérushelyeiben a függvény nem értelmezett: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, ezek a függvény szakadási helyei. (1 pont)

Ha $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1\pm} \dfrac{(-1)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{"0"}{0} = \lim\limits_{x\to 1\pm} \dfrac{-1}{x+3} = -\dfrac{1}{4}$.

Tehát a két féloldali határérték létezik, és értékük megegyezik. Így a függvénynek hézagpontja (megszűntethető szakadása) van az $x = 1$ helyen. (2 pont)

Ha $x = -3$

$\lim\limits_{x\to -3+} \dfrac{(-1)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3+} \dfrac{-1}{x+3} = \dfrac{-1}{0+} = -\infty$ és

$\lim\limits_{x\to -3-} \dfrac{(-1)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3-} \dfrac{-1}{x+3} = \dfrac{-1}{0-} = \infty$

Tehát a két féloldali határérték $\pm\infty$ a szakadás másodfajú, a függvénynek pólusa van az $x = -3$ helyen. (2 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 1$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \cdot \ln(3x-2)$$

(5 pont)

Megoldás. $f(1) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \ln(3-2) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \ln(1) = 0.$ (1 pont)

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot \ln(3x-2) + \sqrt{\dfrac{x}{2}} \cdot \dfrac{3}{3x-2}.$ (1 pont)

$f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln(1) + \sqrt{\dfrac{1}{2}} \cdot \dfrac{3}{1} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}(x-1) + 0 = \frac{3}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(2 pont)

3. Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = \frac{1 + x - 3x^2}{x + 1}$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(1-6x)(x+1) - (1+x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-6x^2 - 5x + 1 - 1 - x + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x}{(x+1)^2} = \frac{-3x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

(1 pont)

A deriváltnak zérushelye van, ha $-3x(x+2) = 0$, azaz $x = 0$ és $x = -2$ esetén. A nevező értéke mindig pozitív, így ha $x > 0$ vagy $x < -2$, akkor a derivált negatív, tehát a függvény szig. mon. csökken. Ha $-2 < x < 0$, akkor a derivált pozitív, a függvény szig. mon. növő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

(3 pont)

A lokális minimum értéke $x = -2$-ben $f(-2) = 13$, míg a lokális maximum értéke $x = 0$-ban $f(0) = 1$. (1 pont)

4. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértéket. Azt is állapíta meg, milyen típusú kritikus határértékről van szó.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot (1-2x)^2$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot (1-2x)^2 = \text{"}0 \cdot \infty\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-2x)^2}{e^x} = \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\infty} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}$$

(2 pont)

$$\underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{(-4)(1-2x)}{e^x} = \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\infty} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{8}{e^x} = \frac{8}{\infty} = 0.$$

(3 pont)