A1 1. zárthelyi pótlása - MEGOLDÁSOK 2024. december 3.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenletet, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$\left|\frac{1-2x}{x}\right| = 3$$

(5 pont)

Megoldás. Legyen $x \neq 0$. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám -3-mal vagy 3-mal egyenlő:

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x} &= -3 \\ 1-2x &= -3x \\ 1 &= -x \\ x &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{1-2x}{x} &= 3 \\ 1-2x &= 3x \\ 1 &= 5x \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(3 pont)

tehát a megoldás: $x = -1$ vagy $x = \frac{1}{5}$. (1 pont)

(1 pont)

2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel szorzatalakban!

$$x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 7x - 2$$

(5 pont)

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek -2 osztói lehetnek.

$1^4 + 5\,1^3 + 3\,1^2 - 7 - 2 = 0,$ tehát az $x_1 = 1$ gyök, továbbá

$(-2)^4 + 5(-2)^3 + 3(-2)^2 - 7(-2) - 2 = 16 - 40 + 12 + 14 - 2 = 0$, tehát az $x_2 = -2$ is gyök.

(1 pont)

Mivel $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} x^4 & + & 5x^3 & + & 3x^2 & - & 7x & - & 2 \\ x^4 & + & x^3 & - & 2x^2 & & & & \\ \hline & & 4x^3 & + & 5x^2 & - & 7x & - & 2 \\ & & 4x^3 & + & 4x^2 & - & 8x & & \\ \hline & & & & x^2 & + & x & - & 2 \\ & & & & x^2 & + & x & - & 2 \\ \hline & & & & & & & & 0 \end{array} \quad : (x^2+x-2) = (x^2+4x+1)$$

(2 pont)

Keressük meg a $x^2 + 4x + 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot(1)\cdot 1}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

(1 pont)

A gyöktényezős alak

$$(x-1)(x+2)\left(x+2-\sqrt{3}\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right).$$

(1 pont)

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt!

$$f(x) = \frac{x-1}{3-2x}, \qquad x \neq -\frac{3}{2}$$

(5 pont)

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
\frac{x_1-1}{3-2x_1} &= \frac{x_2-1}{3-2x_2} \\
(x_1-1)(3-2x_2) &= (x_2-1)(3-2x_1) \\
3x_1 - 3 - 2x_1x_2 + 2x_2 &= 3x_2 - 3 - 2x_1x_2 + 2x_1 \\
3x_1 + 2x_2 &= 3x_2 + 2x_1 \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. (2 pont)
Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{3-2x} &= y \\
x - 1 &= 3y - 2xy \\
x + 2xy &= 3y + 1 \\
x(1+2y) &= 3y + 1 \\
x &= \frac{3y+1}{1+2y}, \qquad \text{ha } y \neq -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$ (3 pont)

4. Számítsa ki a következő függvényhatárértékeket a L'Hospital-szabály használata nélkül!

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x+3} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{2x^2}$$

(5 pont)

Megoldás.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x+3} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{3+0+\infty}{1+0} = \infty$$

(2 pont)

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{2x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

(3 pont)

A1 2. zárthelyi pótlása - MEGOLDÁSOK 2024. december 3.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

$$\text{a)} \quad \frac{\sqrt{x}+x^2}{2^x} \qquad \text{b)} \quad \operatorname{tg}(x^2)\cdot e^{2x}$$

(5 pont)

Megoldás.
a)

$$\left(\frac{\sqrt{x}+x^2}{2^x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x\right)\cdot 2^x - (\sqrt{x}+x^2)\cdot 2^x\,\ln(2)}{2^{2x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x-(\sqrt{x}+x^2)\cdot\ln(2)}{2^x} =$$

$$= \frac{1+4x\sqrt{x}-2\ln(2)\,x-2\ln(2)\,x^2\sqrt{x}}{2^{x+1}\cdot\sqrt{x}}$$

(3 pont)

b)

$$\left(\operatorname{tg}(x^2)\cdot e^{2x}\right)' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}\,e^{2x} + 2\operatorname{tg}(x^2)\,e^{2x}$$

(2 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = \pi$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = 2x\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(5 pont)

Megoldás. $f(\pi) = 2\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\cdot 1 = 2\pi.$ (1 pont)

$f'(x) = 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) + x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right).$ (1 pont)

$f'(\pi) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot 1+\pi\cdot 0 = 2.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = 2(x-\pi)+2\pi = 2x-2\pi+2\pi = 2x.$$

(2 pont)

3. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja, ha igen, akkor melyik ez a pont?

$$f(x) = -x^3+2x^2-1$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját

$$f''(x) = \left(-x^3+2x^2-1\right)'' = \left(-3x^2+4x\right)' = -6x+4.$$

(1 pont)

Ennek zéruzhelye $-6x+4=0$, azaz $x=\frac{2}{3}$-ban van. (1 pont)

x	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl.	$\frown$

Mivel a derivált $x < \frac{2}{3}$-ra pozitív, így ott konvex a függvénygrafikon. $x > \frac{2}{3}$ esetén a derivált negatív, így ott konkáv a függvény. (2 pont)

Az $x = \frac{2}{3}$-nál $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - 1 = -\frac{11}{27}$ a függvényérték, így tehát a $\left(\frac{2}{3}, -\frac{11}{27}\right)$ pontban inflexiós pontja van a függvénynek. (1 pont)

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozza meg az egyenletét!

$$f(x) = \frac{2x - x^2}{x^2 - 1}$$

(5 pont)

Megoldás. A függvénynek szakadási helye van az $x = \pm 1$ helyeken

$$\lim_{x\to 1+} \frac{2x - x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0+} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{2x - x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+} \frac{2x - x^2}{x^2 - 1} = \frac{-3}{0-} = \infty, \qquad \lim_{x\to -1-} \frac{2x - x^2}{x^2 - 1} = \frac{-3}{0+} = -\infty,$$

tehát az $x = 1$ és $x = -1$ egyenesek a függvény függőleges asziptotái. (3 pont)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - x^2}{x^2 - 1} = \frac{\text{"} -\infty \text{"}}{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x - x^2}{x^2 - 1} = \frac{\text{"}\infty\text{"}}{\infty} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1,$$

tehát a függvénynek a $\pm\infty$-ben is vízszintes aszimptotája az $y = -1$ egyenes. (2 pont)