A1 1. zárthelyi második pótlása - MEGOLDÁSOK 2024.12.10.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Vázlatosan ábrázoljuk azon pontok mértani helyét a síkon, melyekre az alábbi egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek

$$x^2 + y^2 < 4 \qquad \text{és} \qquad y < x + 2.$$

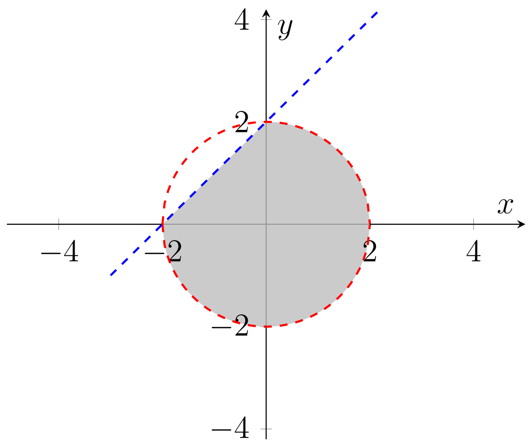
(5 pont)

Megoldás - 1.)

Az első egyenlőtlenség $x^2+y^2 < 4$ megoldáshalmaza egy origó középpontú, 2 sugarú kör belseje.
(1 pont)

A második egyenlőtlenségnél határgörbéje az $y = x + 2$ egyenes. Az egyenes alatti pontok az egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza. (2 pont)

Ábrázolva a két halmazt:



(2 pont)

2. Végezzük el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = x^5 - x^3 - 2x + 2$ és $q(x) = x^2 - x + 3$. Ellenőrizzük az osztás helyességét is! (5 pont)

Megoldás - 2.)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
(x^5 & & & - & x^3 & & & - & 2x & + & 2) & : (x^2 - x + 3) = x^3 + x^2 - 3x - 6 \\
x^5 & - & x^4 & + & 3x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & & x^4 & - & 4x^3 & & & - & 2x & + & 2 & \\
 & & x^4 & - & x^3 & + & 3x^2 & & & & & \\
\hline
 & & & - & 3x^3 & - & 3x^2 & - & 2x & + & 2 & \\
 & & & - & 3x^3 & + & 3x^2 & - & 9x & & & \\
\hline
 & & & & & - & 6x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
 & & & & & - & 6x^2 & + & 6x & - & 18 & \\
\hline
 & & & & & & & & x & + & 20 &
\end{array}$$

(3 pont)

Ellenőrzés:

$$(x^2-x+3)(x^3+x^2-3x-6)+x+20 = x^5-x^4+3x^3+x^4-x^3+3x^2-3x^3+3x^2-9x-6x^2+6x-18+x+20 =$$

$$x^5 - x^3 - 2x + 2.$$

(2 pont)

3. Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\ln x}{2x-3} \cdot \sqrt{x^2-1}.$$

(5 pont)

Megoldás - 3.)

A tört számlálójában szereplő $\ln x$ akkor értelmezhető, ha $x > 0$ (azaz $x \in (0, \infty)$). Továbbá a tört nevezője nem lehet nulla, ezért $2x - 3 \neq 0$, így $x \neq \frac{3}{2}$ (azaz $x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$). A gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív, így

$$x^2 - 1 \geq 0, \text{ ezért } |x| \geq 1, \text{ azaz } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

(3 pont)

A három halmaz közös részén értelmezett a függvény, így

$$x \in \left[1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

(2 pont)

4. Számítsa ki a sorozathatárértékeket!

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)^{2n} \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+3}$$

(5 pont)

Megoldás - 4.)

a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^{2n}}{\left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n}} = \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3}.$$

(2 pont)

b) A rendőr-elv alapján

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+3} \underset{n>1}{<} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Tehát $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+3} = 1$. (3 pont)

A1 2. zárthelyi második pótlása - MEGOLDÁSOK **2024.12.10.**

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

(5 pont)

Megoldás - 1.)

A nevező zérushelyei $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. Tehát $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Ezek a függvény szakadási helyei. (1 pont)

Az $x = 1$-nél

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{x+1}{x-3} = \frac{1+1}{1-3} = -1.$$

Tehát $x = 1$-ben a két féloldali határérték egyenlő, a szakadás megszűntethető. (2 pont)

Az $x = 3$-nál

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 3+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 3+} \frac{x+1}{x-3} = \frac{3+1}{0+} = \infty.$$

$$\lim_{x\to 3-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 3-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 3-} \frac{x+1}{x-3} = \frac{3+1}{0-} = -\infty.$$

Tehát $x = 3$-ban a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás másodfajú, pólus. (2 pont)

2. Írjuk fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = 3x \cdot \sin(2x) + (1-x)^3$$

(5 pont)

Megoldás - 2.)

$f(0) = 3 \cdot 0 \cdot \sin(0) + (1-0)^3 = 0 + 1^3 = 1.$ (1 pont)

$f'(x) = 3 \cdot \sin(2x) + 3x\cos(2x) \cdot 2 + 3(1-x)^2 \cdot (-1) = 3\sin(2x) + 6x\cos(2x) - 3(1-x)^2.$ (1 pont)

$f'(0) = 3\sin(0) + 0\cos(0) - 3(1)^2 = -3.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = (-3)(x-0) + 1 = -3x + 1.$$

(2 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait és lokális szélsőérték helyeit!

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

(5 pont)

Megoldás - 3.)

Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A monotonitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény deriváltját

$$f'(x) = \left(x^3 + 2x^2 - 4x + 3\right)' = 3x^2 + 4x - 4.$$

(1 pont)

Ennek zéruzhelyei az $3x^2 + 4x - 4 = 0$ megoldásai, azaz

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2}{3}, -2.$$

(1 pont)

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

(2 pont)

Az $x = -2$-nél lokális maximuma van a függvénynek, melynek értéke $f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) + 3 = 11$.
Az $x = \frac{2}{3}$-nál lokális minimum van, melynek értéke $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{41}{27}$ a függvényérték. (1 pont)

4. Kati vendégeket vár. Ha x percet szán a főzés előkészítésére, akkor az előkészítés után még $x + \dfrac{200}{x}$ idő alatt készül el az ebéd, és még 5 perc kell a terítéshez. Mennyi időt szánjon az előkészítésre, hogy a lehető legrövidebb idő alatt elkészüljön?

(5 pont)

Megoldás - 4.)

A készülődési idő az x előkészítési hossz függvényében összesen

$$k(x) = x + x + \frac{200}{x} + 5 = 2x + \frac{200}{x} + 5.$$

(1 pont)

$$k'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}.$$

(1 pont)

A derivált nulla lesz, ha $2x^2 - 200 = 0$, azaz $x = \pm 10$-nél van zérushelye (de $x > 0$). Ekkor

x	$(0, 10)$	10	$(10, \infty)$
k'	$-$	0	$+$
k	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

(2 pont)

A lokális minimum hely $x = 10$, azaz 10 perc előkészítés esetén a legrövidebb a készülődési idő.

(1 pont)