

A1 1. zárthelyi pótlása - MEGOLDÁSOK 2025. december 2.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

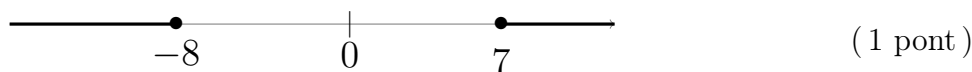
1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$\left| \frac{2x+1}{5} \right| \geq 3 \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. Egy szám abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő 3, ha a szám -3 -nál kisebb vagy egyenlő, vagy 3 -nál nagyobb vagy egyenlő:

$$\begin{array}{ll} \frac{2x+1}{5} \leq -3 & \frac{2x+1}{5} \geq 3 \\ 2x+1 \leq -15 & \text{vagy} \quad 2x+1 \geq 15 \\ 2x \leq -16 & 2x \geq 14 \\ x \leq -8 & x \geq 7 \end{array} \quad (3 \text{ pont})$$

tehát a megoldás: $x \in (-\infty, -8] \cup [7, \infty)$. (1 pont)



2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel szorzatalakban!

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. Emeljünk ki x -et, így $x_1 = 0$ gyöke lesz a polinomnak

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x = x(x^3 + 3x^2 + 4x + 2). \quad (1 \text{ pont})$$

Próbáljunk egész gyököket keresni a $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ kifejezésnek, ezek 2 osztói lehetnek.

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = -1 + 3 - 4 + 2 = 0, \quad \text{tehát az } x_2 = -1 \text{ is gyök.} \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $x+1$ kiemelhető $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ -ből, ezért

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 : x+1 = x^2 + 2x + 2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 4x + 2 \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ 2x + 2 \\ \underline{2x + 2} \\ 0 \end{array} \quad (1 \text{ pont})$$

Keressük a $x^2 + 2x + 2$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát a másodfokú kifejezés további gyöktényezőkre nem bontható, így a szorzatalak:

$$p(x) = x(x+1)(x^2 + 2x + 2). \quad (1 \text{ pont})$$

3. Adja meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő függvény értelmezhető:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3} \cdot \log_4(1+x)}{x^2-4}.$$

(5 pont)

Megoldás.

A gyökjel alá csak nemnegatív szám írható, így $2x-3 \geq 0$, $x \geq \frac{3}{2}$.

(1 pont)

A $\log_3(x)$ függvény a pozitív számokon értelmezett, tehát $1+x > 0$, azaz $x > -1$.

(1 pont)

Továbbá 0-val nem oszthatunk, így $x^2-4 \neq 0$, tehát $x \neq 2$ ill. $x \neq -2$.

(1 pont)

E három feltételből adódik, hogy $x \in [\frac{3}{2}, \infty) \setminus \{2\} = [\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \infty)$.

(2 pont)

4. Vizsgálja meg a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \frac{n^2-1}{2n+3}$$

(5 pont)

Megoldás. Vizsgálva a monotonitást:

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{>}{<} a_{n+1} \\ \frac{n^2-1}{2n+3} &\stackrel{>}{<} \frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)+3} \\ \frac{n^2-1}{2n+3} &\stackrel{>}{<} \frac{n^2+2n}{2n+5} \\ (n^2-1)(2n+5) &\stackrel{>}{<} (n^2+2n)(2n+3) \\ 2n^3-2n+5n^2-5 &\stackrel{>}{<} 2n^3+4n^2+3n^2+6n \\ -5 &< 2n^2+8n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát a sorozat monoton növekedő.} \end{aligned}$$

(2 pont)

A határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{\infty - 0}{2 + 0} = \infty.$$

(1 pont)

A sorozat tehát alulról korlátos. A legnagyobb alsó korlátja a monotonitás miatt az első elem $a_1 = \frac{1^2-1}{2 \cdot 1+3} = \frac{0}{4} = 0$. Felső korlátja nincsen, mivel ∞ -hez tart.

(2 pont)

A1 2. zárthelyi pótlása - MEGOLDÁSOK 2024. december 3.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit!

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} = \frac{(x+3)(x-2)}{x(x-2)}.$

A nevező zérushelyeiben a függvény nem értelmezett: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, ezek a függvény szakadási helyei. Ha $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+3)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{''0''}{0} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+3}{x} = \frac{5}{2}.$$

Ugyanígy adódik $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x+3}{x} = \frac{5}{2}.$

Tehát a két féloldali határérték létezik, és értékük megegyezik. Így a függvénynek hízagpontja (megszüntethető szakadása) van az $x = 2$ helyen. (2 pont)

Ha $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x+3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{0+} = \infty, \quad \text{és}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x+3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{0-} = -\infty.$$

Tehát a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás másodfajú, a függvénynek pólusa van az $x = 0$ helyen. (3 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 1$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{3x+1}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(1) = \frac{\ln(1)}{3+1} = \frac{0}{4} = 0.$

(1 pont)

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(3x+1) - \ln(x^2) \cdot 3}{(3x+1)^2}.$$

(1 pont)

$$f'(1) = \frac{2(3+1) - \ln(1) \cdot 3}{(3+1)^2} = \frac{8-0}{16} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 0 \quad \text{azaz} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

(2 pont)

3. Egy termék előállításának költsége 20 peták. Ha x petákért árusítják, akkor $120 - 3x$ darabot tudnak eladni belőle. Mennyiért árusítsák a terméket, hogy a lehető legnagyobb legyen az összes haszon? (5 pont)

Megoldás. Az egy terméken keletkezett hasznunk $(x - 20)$, ezért az összes haszon függvénye

$$h(x) = (120 - 3x)(x - 20) = -3x^2 + 180x - 2400,$$

ahol $x \in (0, \infty)$ lehet.

(1 pont)

Ekkor keresve a $h(x)$ pozitív számokon vett globális maximumát

$$h'(x) = -6x + 180.$$

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyét $-6x + 180 = 0$, ha $x = 30$.

x	$(0, 30)$	30	$(30, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

(3 pont)

Azaz $x = 30$ -ban globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, értéke itt

$$(120 - 90)(30 - 20) = 30 \cdot 10 = 300.$$

Tehát 30 petákot kell költenünk egy termék előállítására, hogy hasznunk a maximális 300 peták legyen. (1 pont)

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = (2x + 1)e^x$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját

$$f''(x) = ((2x + 1)e^x)'' = (2e^x + (2x + 1)e^x)' = ((2x + 3)e^x)' = 2e^x + (2x + 3)e^x = (2x + 5)e^x.$$

(1 pont)

Ennek zérushelye $2x + 5 = 0$, azaz $x = -\frac{5}{2}$ -ben van.

(1 pont)

x	$(-\infty, -\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$(-\frac{5}{2}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$

Mivel a derivált $x > -\frac{5}{2}$ esetén pozitív, így ott konvex a függvénygrafikon. $x < -\frac{5}{2}$ esetén a derivált negatív, így ott konkáv a függvény. (2 pont)

Az $x = -\frac{5}{2}$ esetén inflexiós pontja van a függvénynek.

(1 pont)