A1 MINTA(B) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = (x^3 + 2) \cdot e^{2x}$$

(5 pont)

Megoldás. $f(0) = (0^3 + 2) \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2.$

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x} + (x^3 + 2) \cdot e^{2x} \cdot 2 = (2x^3 + 3x^2 + 4) \cdot e^{2x}.$

$f'(0) = (2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 4) \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4.$

Az érintő egyenlete

$$y = 4(x - 0) + 2 = 4x + 2.$$

2. Ha egy adott termék előállítására x petákot költünk, akkor azt később $10 + 12\sqrt{x}$ petákért tudjuk eladni. Mennyit költsünk az előállításra, hogy a hasznunk a lehető legtöbb legyen termékenként?

(5 pont)

Megoldás. Az egy terméken keletkezett hasznunk

$$h(x) = (10 + 12\sqrt{x}) - x,$$

ahol $x \in (0, \infty)$ lehet. Ekkor keresve a $h(x)$ pozitív számokon vett globális maximumát

$$h'(x) = \frac{12}{2\sqrt{x}} - 1.$$

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyeit $\frac{12}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$, ha $6 = \sqrt{x}$, azaz $x = 36$.

x	$(0, 36)$	36	$(36, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Azaz $x = 36$-ban globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, értéke itt $10 + 12 \cdot 6 - 36 = 46$. Tehát 36 petákot kell költenünk egy termék előállítására, hogy hasznunk termékenként a maximális 46 peták legyen.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. Azt is állapíta meg, milyen típusú kritikus határértékről van szó.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1-\cos(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1-\cos(2x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2\sin(2x-1)}{4(2x-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sin(2x-1)}{4x-2} \overset{*}{=} \frac{\text{"}0\text{"}}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}$$

$$\underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2\cos(2x-1)}{4} = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

* vagy a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ nevezetes határértéket felhasználva:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sin(2x-1)}{2(2x-1)} \underset{h=2x-1}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját

$$f''(x) = (x^3-3x^2)'' = (3x^2-6x)' = 6x-6.$$

Ennek zéruzhelye $6x-6=0$, azaz $x=1$-ben van.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	infl.	$\smile$

Mivel a derivált $x<1$-re negatív, így ott konkáv a függvénygrafikon. $x>1$ esetén a derivált pozitív, így ott konvex a függvény. Az $x=1$-ben inflexiós pontja van a függvénynek.