

A1 2. zárthelyi (A) MEGOLDÁS**2025. november 18.**

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi függvényhatárértéket!

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 3} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 3} &= " \infty - \infty " = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 3}}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 + 3)}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \frac{-3}{\infty + \infty} = 0. \end{aligned}$$

(3 pont)

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = (-2) \cdot 1^2 = -2.$$

VAGY

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \frac{"0"}{0} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(2x) \cdot 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \frac{\sin(2x)}{2x} = (-2) \cdot 1 = -2.$$

(2 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{e^x}$$

(5 pont)

$$\textbf{Megoldás.} \quad f(0) = \frac{\sqrt{0^2 + 4}}{e^0} = \frac{2}{1} = 2.$$

(1 pont)

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{e^x} \right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x \cdot e^x - \sqrt{x^2 + 4} \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \sqrt{x^2 + 4}}{e^x} = \frac{x - (x^2 + 4)}{e^x \sqrt{x^2 + 4}}.$$

(2 pont)

$$f'(0) = \frac{0 - (0 + 4)}{e^0 \sqrt{0 + 4}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

(1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = (-2)(x - 0) + 2 = -2x + 2.$$

(1 pont)

3. Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = \ln(2 - x) + x + 2$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = (-\infty, 2)$

$$f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (-1) + 1 = 1 - \frac{1}{2-x} = \frac{2-x-1}{2-x} = \frac{1-x}{2-x}.$$

(1 pont)

A deriváltak zérushelye van, ha $1 - x = 0$, azaz $x = 1$ esetén. A nevező értéke mindig pozitív, ha $x < 2$, így

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

(3 pont)

A lokális maximum értéke $x = 1$ -ben $f(1) = \ln(2 - 1) + 1 + 2 = 0 + 1 + 2 = 3$.

(1 pont)

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozza meg az egyenletét!

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{(x - 1)^2}$$

(5 pont)

Megoldás. A függvénynek szakadási helye van az $x = 1$ -ben

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + 2}{(x - 1)^2} = \frac{3}{0+} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + 2}{(x - 1)^2} = \frac{3}{0+} = \infty,$$

tehát az $x = 1$ egyenes a függvény függőleges aszimptotája.

(2 pont)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{(x - 1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a ∞ -ben vízszintes aszimptotája az $y = 1$ egyenes.

(2 pont)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{(x - 1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a $-\infty$ -ben is vízszintes aszimptotája az $y = 1$ egyenes.

(1 pont)