

A1 2. zárthelyi (B) MEGOLDÁS**2025. november 18.**

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi függvényhatárértéket!

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2} - x \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2} - x &= " \infty - \infty " = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \frac{2}{\infty + \infty} = 0. \end{aligned}$$

(3 pont)

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = (-2) \cdot 1^2 = -2.$$

VAGY

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(2x) \cdot 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \frac{\sin(2x)}{2x} = (-2) \cdot 1 = -2.$$

(2 pont)

2. Írja fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{e^x}$$

(5 pont)

$$\textbf{Megoldás.} \quad f(0) = \frac{\sqrt{1-0}}{e^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

(1 pont)

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{1-2x}}{e^x} \right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2) \cdot e^x - \sqrt{1-2x} \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}} - \sqrt{1-2x}}{e^x} = \frac{2x - 2}{e^x \sqrt{1-2x}}.$$

(2 pont)

$$f'(0) = \frac{0 - 2}{e^0 \sqrt{1-0}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

(1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = (-2)(x - 0) + 1 = -2x + 1.$$

(1 pont)

3. Határozza meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = \ln(2+x) - x + 2$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = (-2, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} \cdot 1 - 1 = \frac{1 - (2+x)}{2+x} = \frac{-1-x}{2+x}.$$

(1 pont)

A deriváltak zérushelye van, ha $-1-x=0$, azaz $x=-1$ esetén. A nevező értéke mindig pozitív, ha $x < 2$, így

x	$(-2, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

(3 pont)

A lokális maximum értéke $x = -1$ -ben $f(-1) = \ln(2+(-1)) - (-1) + 2 = 0 + 1 + 2 = 3$. (1 pont)

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozza meg az egyenletét!

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{(x+1)^2}$$

(5 pont)

Megoldás. A függvénynek szakadási helye van az $x = -1$ -ben

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 - 2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2 - 2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0+} = -\infty,$$

tehát az $x = -1$ egyenes a függvény függőleges aszimptotája.

(2 pont)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a ∞ -ben vízszintes aszimptotája az $y = 1$ egyenes.

(2 pont)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a $-\infty$ -ben is vízszintes aszimptotája az $y = 1$ egyenes.

(1 pont)